Vybrané partie z teórie funkcie komplexnej premennej a Laplaceova transformácia

Komplexné funkcie

Definícia. Nech $\varepsilon > 0$.

Množinu $O_\varepsilon(z_0) = \{z \in C;\ |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazývame ε-ové okolie čísla z_0.

Množinu $O^o_\varepsilon(z_0) = \{z \in C;\ 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazývame prstencové ε-ové okolie čísla z_0.

Množinu $O_\varepsilon(\infty) = \{z \in C;\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ nazývame ε-ové okolie bodu ∞.

Definícia. Nech $A \subset C$, $z_0 \in C^*$.

Bod z_0 nazývame hromadný bod množiny A, ak existuje $O^o_\varepsilon(z_0)$ také, že $O^o_\varepsilon(z_0) \cap A \neq \emptyset$.

Definícia. Nech $f : A \to C$ je komplexná funkcia, $z_0 \in C$ je hromadný bod množiny A.

Hovoríme, že $w \in C^*$ je limita funkcie f v z_0, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak $z \in O^o_\delta(z_0) \cap A$, tak $f(z) \in O_\varepsilon(w)$.

Označenie

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w.$$

Definícia. Nech $f : A \to C$ je komplexná funkcia, $z_0 \in A$ je hromadný bod množiny A.

Hovoríme, že funkcia f je v z_0 spojitá ak

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Definícia. Nech $f : A \to C$ je komplexná funkcia, $z_0 \in A$ je hromadný bod množiny A.

Hovoríme, že číslo $w \in C$ je derivácia funkcie f v z_0 ak existuje

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w.$$

Označenie $f'(z_0) = w$.

Definícia. Hovoríme, že komplexná funkcia $f : A \to C$ je analytická na otvorenej množine $A \subset C$ ak pre každé $z \in A$ existuje $f'(z)$.

Príklad.

Racionálna funkcia

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

v ktorej $P(z)$, $Q(z)$ sú polynómy, je analytická na $A = \{z \in C;\ Q(z) \neq 0\}$.

Geometrický a mocninový rad

Definícia. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^n$$

nazývame (komplexný) geometrický rad.

Veta. *Geometrický rad konverguje práve vtedy, keď* $|q| < 1$.

Vtedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^n = a \frac{1}{1-q}.$$

Definícia. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

nazývame mocninový rad so stredom v z_0.

Veta. *Nech*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

je mocninový rad so stredom v z_0.

Potom existuje r $0 \leq r \leq \infty$ *také, že*

-mocninový rad je konvergentný pre každé z *pre ktoré* $|z - z_0| < r$,

-mocninový rad je divergentný pre každé z *pre ktoré* $|z - z_0| > r$.

Číslo r *nazývame polomer konvergencie, kruh* $K(z_0, r) = \{z \in C;\ |z - z_0| < r\}$ *nazývame obor konvergencie mocninového radu.*

Veta. *Nech*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

je mocninový rad konvergentný na kruhu $K(z_0, r)$.

Potom aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, (z - z_0)^{n-1}$$

je konvergentný na kruhu $K(z_0, r)$.

Ak

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (z - z_0)^n = f(z),$$

tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, (z - z_0)^{n-1} = f'(z).$$

Exponenciálna funkcia

Definícia. Funkciu $f : C \to C$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

nazývame exponenciálna funkcia.

Označenie e^z, $exp\, z$.

Veta. *Nech* $f(z) = e^z$ *je exponenciálna funkcia.*
Potom
- $f(z)$ *je analytická na* C *a platí* $f'(z) = f(z)$
- $f(x) = e^x \in R^+$ *pre* $x \in R$
- $e^{(z+w)} = e^z \cdot e^w$
- $e^{iy} = \cos y + i \sin y$
- $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$
- $e^z = e^w$ *práve vtedy, keď* $z = w + 2k\pi i$ *(periodicita)*

Taylorov rad

Veta. *Nech* $f : A \to C$ *je analytická funkcia na otvorenej množine* A*. Nech pre* $r > 0$ *je* $K(z_0, r) \subset A$*.*

Potom existuje jediný mocninový rad so stredom v bode z_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

konvergentný na kruhu $K(z_0, r)$*, taký, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n.$$

Pritom

$$c_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}.$$

Definícia. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} \, (z - z_0)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie f na kruhu $K(z_0, r)$.

Izolované singulárne body a Laurentov rad

Definícia. Nech $f : A \to C$ je komplexná funkcia analytická na otvorenej množine A, $z_0 \in A$ je hromadný bod A, nech existuje $O^o_\varepsilon(z_0) \subset A$ a nech $f'(z_0)$ neexistuje.

Potom bod z_0 nazývame izolovaný singulárny bod funkcie f.

Definícia. Nech z_0 je izolovaný singulárny bod funkcie $f : A \to C$.
Potom ak
- $\lim_{z \to z_0} f(z) = w \in C$, tak z_0 nazývame odstrániteľný singulárny bod,
- $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, tak z_0 nazývame pól,
- $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje, tak z_0 nazývame podstatne singulárny bod.

Veta. *Nech* z_0 *je pól funkcie* $f : A \to C$*.*

Potom existuje jediné číslo $k \geq 1$ *a funkcia* $f_1(z)$ *analytická na* $A \cup \{z_0\}$ *a taká, že* $f_1(z_0) \neq 0$ *pre ktoré*

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^k}.$$

Definícia. Číslo $k \geq 1$ nazývame rád pólu z_0.

Veta. *Nech z_0 je pól rádu k funkcie $f : A \to C$ a nech*

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^k}.$$

Nech

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n.$$

Potom

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n,$$

pričom $a_n = c_{n+k}$ a špeciálne $a\_k = c_0 \neq 0$.

Definícia. Nech z_0 je pól rádu k funkcie $f : A \to C$. Rad

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n,$$

pričom

$$a_n = c_{n+k} = \frac{{f_1}^{n+k}(z_0)}{(n+k)!}$$

nazývame Laurentov rad funkcie f v póle z_0 na množine $\{z \in C;\ 0 < |z - z_0| < r\}$.

Koeficient a_{-1} nazývame reziduum funkcie f v póle z_0. Označujeme $a_{-1} = \operatorname*{res}_{z_0} f(z)$

Veta. *Nech z_0 je pól rádu k funkcie $f : A \to C$.*

Potom

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

Laplaceova transformácia

Definícia Laplaceovej transformácie

Definícia. Funkciu $f(t) : R \to R$ nazývame originál ak – $f(t) = 0$ pre $t < 0$,

– $f(t)$ je po častiach spojitá funkcia,

– má najviac exponenciálny rast, t.j. existujú čísla $M > 0$, $\alpha \geq 0$ také, že $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$.

Číslo α, pre ktoré je $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, nazývame koeficient rastu funkcie f. Dolné ohraničenie množiny všetkých koeficientov rastu funkcie f, t.j. $\inf\{\alpha;\ |f(t)| \leq M e^{\alpha t}\}$, nazývame index rastu.

Definícia. Nech funkcia $f(t) : R \to R$ je originál s indexom rastu α_0.

Komplexnú funkciu

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

definovanú na množine $\{z \in C;\ Re(z) > \alpha_0\}$ nazývame obraz funkcie f v Laplaceovej transformácii.

Značíme $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ alebo $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$.

Príklad. Funkcia

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pre } t < 0 \\ 1 \text{ pre } t \geq 0 \end{cases}$$

je originál s indexom rastu 0, a jeho obraz je

$$F(p) = \frac{1}{p}$$

pre $\{p \in C; Re\, p > 0\}$.

Vlastnosti Laplaceovej transformácie

Veta. *Obraz*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

je analytická funkcia na množine $\{z \in C;\ Re(z) > \alpha_0\}$, *a platí*

$$F'(p) = \int_0^\infty -tf(t)e^{-pt}\,dt$$

Dôsledok. *Ak*

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p),$$

tak

$$tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -F'(p),$$

a

$$t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n F^{(n)}(p),$$

Veta o linearite. *Nech funkcie* $f(t), g(t) : R \to R$ *sú originály s indexom rastu* α_0 *a obrazmi* $F(p)$, $G(p)$.

Potom funkcia $\alpha f(t) + \beta g(t)$ *je originál s indexom rastu* α_0 *a obrazom*

$$\alpha F(p) + \beta G(p).$$

Veta o posunutí v obraze. *Nech funkcia* $f(t) : R \to R$ *je originál s indexom rastu* α_0 *a obrazom* $F(p)$.

Potom funkcia $g(t) = f(t)e^{at}$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0 + a$ *a obrazom*

$$G(p) = F(p - a).$$

Dôsledok.

$$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p},$$

$$e^{at}t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$\cos\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

$$\sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$e^{at}\cos\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2},$$

$$e^{at}\sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2},$$

$$t\cos\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$t\sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Veta o posunutí originálu. *Nech funkcia* $f(t) : R \to R$ *je originál s indexom rastu* α_0 *a obrazom* $F(p)$ *a nech* $t_0 > 0$ *je konštanta.*

Potom funkcia $g(t) = f(t-t_0)\eta(t-t_0)$ *je originál s indexom rastu* α_0 *a obrazom*

$$G(p) = F(p)e^{-pt_0}.$$

Veta o obraze derivácie. *Nech funkcie* $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t) : R \to R$ *sú spojité originály a nech* $f^{(n)}(t)$ *je originál s indexom rastu* α_0.

Potom obraz $f^{(n)}(t)$ *je*

$$p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).$$

Poznámka. Ak funkcia $f(t)$ spĺňa nulové začiatočné podmienky, tak

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^n F(p).$$

Veta o obraze integrálu. *Nech funkcia* $f(t)$ *je originál s indexom rastu* α_0.

Potom $g(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ *je originál a platí*

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Konvolúcia a Laplaceova transformácia

Definícia. Nech $f(t), g(t) : R \to R$ sú po častiach spojité funkcie.
Funkciu

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds$$

nazývame konvolutórny súčin funkcií f a g.
Ak $f(t), g(t) : R \to R$ sú originály, tak

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds = \int_{0}^{t} f(s)g(t-s)\,ds$$

nazývame konvolutórny súčin funkcií f a g.

Veta o obraze konvolúcie. *Nech $f(t), g(t) : R \to R$ sú originály.*
Potom

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(s)g(t-s)\,ds$$

je originál a platí

$$(f * g)(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)G(p).$$

Spätná Laplaceova transformácia

Veta o spätnej transformácii. *Nech $F(p)$ je rýdzo-racionálna funkcia, $p_1, \ldots, p_k$ sú jej póly, a nech funkcia F je obrazom originálu $f(t)$.*
Potom

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{p_i} F(p)e^{pt}.$$