Diferenciálne rovnice.

Definícia. Nech funkcia $f : [a, b] \times [c, d] \to R$ je spojitá. Rovnicu

$$x' = f(t, x),$$

nazývame obyčajná diferenciálna rovnica prvého rádu.

Definícia. Spojite diferencovateľnú funkciu $x : I \subset [a, b] \to R$ takú, že

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

nazývame riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice prvého rádu.

Obyčajnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$x' = f(t, x),$$

so začiatočnou podmienkou

$$x(t_0) = x_0,$$

nazývame začiatočná úloha.

Riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku nazývame riešenie začiatočnej úlohy.

Rovnice so separovateľnými premennými.

Definícia. Nech funkcie $f : [a, b] \to R$, $g : [c, d] \to R$ sú spojité.

Rovnicu

$$x' = f(t) \cdot g(x),$$

nazývame rovnica so separovateľnými premennými.

Veta o metóde separácie. *Nech $g(x) \neq 0$ na intervale (c, d). Nech $x_0 \in (c, d)$,*

Potom pre každú začiatočnú podmienku $x(t_0) = x_0$, existuje jediné riešenie $x(t) : I \subset [a, b] \to (c, d)$ začiatočnej úlohy

$$x' = f(t) \cdot g(x),$$
$$x(t_0) = x_0$$

a to

$$x(t) = G^{-1}(F(t))$$

kde $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$ a $G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y)}\, dy$.

Veta o konštantných riešeniach. *Nech $g(x_i) = 0$.*

Potom funkcia $x(t) = x_i$, je konštantné riešenie začiatočnej úlohy

$$x' = f(t) \cdot g(x),$$
$$x(t_0) = x_i.$$

Definícia.

Rovnicu

$$x' = g(x),$$

nazývame autonómna diferenciálna rovnica.

Tvrdenie o časovom posune. *Ak funkcia $x(t)$ je riešenie autonómnej rovnice*

$$x' = g(x),$$

tak aj funkcia $x(t + s)$ je riešením tejto rovnice a to pre ľubovoľnú konštantu s.

Lineárne diferenciálne rovnice 1.rádu

Definícia. Nech $p(t),\ f(t) : I \to R$ sú spojité funkcie. Rovnicu

$$x' = p(t)x + f(t)$$

nazývame lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu.

Ak $f(t) = 0$, tak rovnicu

$$x' = p(t)x$$

nazývame homogénna lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu.

Homogénna rovnica.

Veta o riešení. *Homogénna lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu má pre každú začiatočnú podmienku $x(t_0)$ jediné riešenie definované na celom intervale I a to*

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

Označujeme $P(t) = \int_{t_0} tp(s)\, ds$. Funkciu $e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} = e^{P(t)}$ nazývame prenosová funkcia. Prenosová funkcia je kladná. Každé riešenie je jej násobkom.

Veta o limitných vlastnostiach. *Nech $p(t) : (a, \infty) \to R$ je spojitá funkcia. Nech $e^{P(t)}$ je prenosová funkcia*

1. Ak existuje číslo $p_0 > 0$ také, že $p(t) \geq p_0 > 0$ pre každé t, tak

$$\lim_{t\to\infty} e^{P(t)} = \infty.$$

2. Ak existuje číslo $p_0 < 0$ také, že $p(t) \leq p_0 < 0$ pre každé t, tak

$$\lim_{t\to\infty} e^{P(t)} = 0.$$

Poznámka. Tú istú limitnú vlastnosť ako prenosová funkcia majú všetky riešenia (až na znamienko limity v prípade 1., ktorá je pre záporné hodnoty začiatočného stavu x_0 rovná $-\infty$.)

Veta o periodicite. *Nech $p(t) : (a, \infty) \to R$ je spojitá funkcia. Nech $e^{P(t)}$ je prenosová funkcia*

Ak

– funkcia $p(t)$ je periodická s periodou T,

– $\int_b^{b+T} p(t)\, dt = 0$,

tak prenosová funkcia je periodická s periodou T.

Nehomogénna rovnica.

Veta o štruktúre množiny riešení.

Nech $y_p(t)$ je riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 1.rádu.

Potom každé riešenie $y(t)$ nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 1.rádu sa dá vyjadriť v tvare

$$y(t) = y_p(t) + ce^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

Riešenie y_p nazývame partikulárne. Hľadá sa metódou variácie konštánt.

Veta o partikulárnom riešení.

Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu má partikulárne riešenie $y_p(t)$ *v tvare*

$$y_p(t) = \int f(t) \cdot e^{-P(t)}\, dt \cdot e^{P(t)},$$

kde

$$P(t) = \int p(t)\, dt.$$

Partikulárne riešenie môžeme nájsť aj použitím určitého integrálu.

Definícia vynútenej odozvy.

Partikulárne riešenie

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} f(t) \cdot e^{-P(t)}\, dt \cdot e^{P(t)},$$

kde

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds$$

nazývame vynútená odozva.

Vynútená odozva spĺňa podmienku $y_0(t_0) = 0$.

Lineárne diferenciálne rovnice 2.rádu s konštantnými koeficientami

Definícia.

Nech $f(t) : I \to R$ je spojitá funkcia. Rovnicu

$$x'' + ax' + bx = f(t)$$

nazývame lineárna diferenciálna rovnica 2.rádu. Konštanty $a, b \in R$ nazývame koeficienty.

Ak $f(t) = 0$, tak rovnicu

$$x'' + ax' + bx = 0$$

nazývame homogénna lineárna diferenciálna rovnica 2.rádu.

Homogénna rovnica

Veta o linearite.

Ak funkcie $x_1(t)$, $x_2(t) : I \to R$ sú riešenia homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu, tak aj každá ich lineárna kombinácia je riešením tejto rovnice.

Označme

$$\text{(D)} \qquad x'' + ax' + bx = 0$$

a

$$\text{(CH)} \qquad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Veta o riešení.

Ak číslo λ je koreňom charakteristickej rovnice (CH) tak funkcia $x(t) = e^{\lambda t}$ je riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice (D).

Veta o reálnych koreňoch.

Ak charakteristická rovnica (CH) má dva rôzne reálne korene λ_1, λ_2 tak funkcie $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sú riešenia homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice (D).

Všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}.$$

Veta o komplexne združených koreňoch.

Ak charakteristická rovnica (CH) má dva komplexne združené korene $\lambda_{1,2} = h \pm i\omega$, tak funkcie $\varphi_1(t) = e^{ht} \cos \omega t$, $\varphi_2(t) = e^{ht} \sin \omega t$ sú riešenia homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice (D).

Všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c_1 \cdot e^{ht} \cos \omega t + c_2 \cdot e^{ht} \sin \omega t.$$

Veta o dvojnásobnom koreni.

Ak charakteristická rovnica (CH) má dvojnásobný koren λ, tak funkcie $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$, $\varphi_2(t) = te^{\lambda t}$ sú riešenia homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice (D).

Všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot te^{\lambda t}.$$

Nehomogénna rovnica

Budeme sa zaoberať rovnicou

$$x'' + ax' + bx = f(t).$$

Veta o štruktúre množiny riešení.

Nech $y_p(t)$ *je riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2.rádu a* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *tvoria bázu množiny riešení príslušnej homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice.*

Potom každé riešenie $y(t)$ *nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2.rádu sa dá vyjadriť v tvare*

$$y(t) = y_p(t) + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

Riešenie y_p nazývame partikulárne. Vo všeobecnom prípade sa hľadá metódou variácie konštánt.

Ak ale funkcia $f(t)$ je v tvare súčinu polynómu a exponenciálnej funkcie, tak použijeme pri výpočte partikulárneho riešenia nasledujúcu vetu.

Veta o špeciálnej pravej strane. *Nech* $P_n(t)$ *je polynóm stupňa* n, α *je komplexné číslo. Nech funkcia* $f(t) = P_n(t)e^{\alpha(t)}$.

Potom partikulárne riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2.rádu

$$x'' + ax' + bx = P_n(t)e^{\alpha t}$$

má tvar

$$y_p(t) = Q_n(t)e^{\alpha t}t^k$$

kde $Q_n(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n$ *je polynóm rovnakého stupňa* n *s neurčitými koeficientami* $b_0, \ldots, b_n$ *a* k *je počet výskytov čísla* α *medzi koreňmi charakteristickej rovnice*

$$\text{(CH)} \qquad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Poznámka. Použitie tejto vety je založené na dosadení riešenia y_p a jeho derivácií do nehomogénnej diferenciálnej rovnice, z čoho porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách t^k dostaneme rovnice pre výpočet neznámych koeficientov $b_0, \ldots, b_n$.

Veta o princípe superpozície.

Ak $y_1(t)$ *je riešenie rovnice*

$$x'' + ax' + bx = f_1(t)$$

a $y_2(t)$ *je riešenie rovnice*

$$x'' + ax' + bx = f_2(t)$$

tak $y_1 + y_2(t)$ *je riešenie rovnice*

$$x'' + ax' + bx = f_1(t) + f_2(t).$$