Fourierove rady.

Periodické funkcie.

Definícia. Funkcia $f : R \to R$ sa nazýva periodická, ak existuje $T > 0$ také, že $f(t+T) = f(t)$ pre každé $t \in R$.

Číslo T nazývame perióda.

Najmenšiu periódu nazývame základná perióda.

Veta o linearite. *Ak funkcie $f, g : R \to R$ sú periodické s periódou T, tak $\alpha f + \beta g : R \to R$ je periodická s periódou T.*

Veta o derivácii. *Ak funkcia $f : R \to R$ je diferencovateľná a periodická s periódou T, tak $f' : R \to R$ je periodická s periódou T.*

Definícia. Funkcia $f : R \to R$ sa nazýva po častiach spojitá, ak má na ľubovoľnom ohraničenom intervale $[a, b]$ najviac konečne veľa bodov nespojitosti a v každom bode nespojitosti t_i, existujú vlastné limity $\lim_{t \to t_i -} f(t) = L^-$, $\lim_{t \to t_i +} f(t) = L^+$.

Definícia. Funkcia $f : R \to R$ sa nazýva po častiach spojite diferencovateľná, ak je po častiach spojitá, na ľubovoľnom ohraničenom intervale $[a, b]$ má najviac konečne veľa bodov v ktorých nie je diferencovateľná a v každom z nich existujú vlastné limity $\lim_{t \to t_i -} f'(t) = L_1^-$, $\lim_{t \to t_i +} f'(t) = L_1^+$.

Veta. *Periodická po častiach spojitá funkcia je ohraničená.*

Veta. *Ak funkcia $f : R \to R$ je periodická s periódou T a po častiach spojitá, tak*

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt.$$

Trigonometrický rad.

Definícia. Konečný súčet

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t$$

nazývame trigonometrický polynóm.

Rad (nekonečný súčet)

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t$$

nazývame trigonometrický rad.

Veta. *Nech $f(t) R \to R$ je súčet konvergentného trigonometrického radu.*

Potom funkcia f je periodická s periódou T.

Cieľom ďalšieho postupu je opačný proces. K danej periodickej funkcii f nájsť trigonometrický rad, ktorý k nej konverguje.

Definícia. Postupnosť funkcií

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{T}t,\ \sin\frac{2\pi}{T}t,\cdots,\cos\frac{2\pi k}{T}t,\ \sin\frac{2\pi k}{T}t,\cdots$$

periodických so spoločnou periódou T nazývame trigonometrický systém.

Veta. *Trigonometrický systém*

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{T}t,\ \sin\frac{2\pi}{T}t,\cdots,\cos\frac{2\pi k}{T}t,\ \sin\frac{2\pi k}{T}t,\cdots$$

je ortogonálny, t.j. platí

$$\int_a^{a+T} 1\cdot\cos\frac{2k\pi}{T}t\,dt=0,$$

$$\int_a^{a+T} 1\cdot\sin\frac{2k\pi}{T}t\,dt=0,$$

$$\int_a^{a+T} \cos\frac{2k\pi}{T}t\cdot\sin\frac{2m\pi}{T}t\,dt=0,$$

$$\int_a^{a+T} \cos\frac{2k\pi}{T}t\cdot\cos\frac{2m\pi}{T}t\,dt=0,\qquad k\neq m,$$

$$\int_a^{a+T} \sin\frac{2k\pi}{T}t\cdot\sin\frac{2m\pi}{T}t\,dt=0,\qquad k\neq m.$$

Ďalej

$$\int_a^{a+T} 1\,dt=T,$$

$$\int_a^{a+T} \cos^2\frac{2k\pi}{T}t\,dt=\frac{T}{2},$$

$$\int_a^{a+T} \sin^2\frac{2k\pi}{T}t\,dt=\frac{T}{2}.$$

Fourierov rad

Definícia. Nech funkcia $f:R\to R$ je periodická s periódou T a po častiach spojitá.

Rad

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{2\pi k}{T}t+b_k\sin\frac{2\pi k}{T}t,$$

v ktorom

$$a_0=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt,$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}t\,dt,$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}t\,dt,$$

nazývame Fourierov rad funkcie f.

Čísla a_0, a_k, b_k nazývame Fourierove koeficienty funkcie f.

Veta. *Nech funkcia $f : R \to R$ je periodická s periódou T a po častiach spojite diferencovateľná.*
Potom jej Fourierov rad je konvergentný na R.

Poznámka. Ale jeho súčet nie je presne $f(t)$.

Definícia. Nech funkcia $f : [a, a+T] \to R$ je po častiach spojitá.
Periodickú funkcia $\tilde{f} : R \to R$ definovanú

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lim_{s \to a+} f(s) + \lim_{s \to a+T-} f(s) & \text{pre } t = a \\ \frac{1}{2} \lim_{s \to t+} f(s) + \lim_{s \to t-} f(s) & \text{pre } t \in (a, a+T) \\ f(t-kT) & \text{pre } t \in [a+kT, a+T+kT) \end{cases}$$

nazývame normalizované periodické predĺženie funkcie f.

Veta. *Nech funkcia $f : R \to R$ je periodická s periódou T a po častiach spojite diferencovateľná. Nech $\tilde{f}$ je normalizované periodické predĺženie funkcie $f : [a, a+T] \to R$.*
Potom Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii $\tilde{f}$ na R.

Dôsledok. *Nech funkcia $f : R \to R$ je naviac spojitá.*
Potom Fourierov rad funkcie f konverguje k funkcii f na R.

Kosínusový a sínusový rad.

Definícia. Nech funkcia $f : [0, \frac{T}{2}] \to R$ je po častiach spojitá.
Nech $f_p : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to R$ je definovaná

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ f(-t) & \text{pre } t \in [-\frac{T}{2}, 0]. \end{cases}$$

Potom normalizované periodické predĺženie $\tilde{f}_p : R \to R$ funkcie f_p nazývame párne normalizované periodické predĺženie funkcie f.
Nech $f_n : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to R$ je definovaná

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pre } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -f(-t) & \text{pre } t \in [-\frac{T}{2}, 0] \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Potom normalizované periodické predĺženie $\tilde{f}_n : R \to R$ funkcie f_n nazývame nepárne normalizované periodické predĺženie funkcie f

Definícia. Fourierov rad funkcie $\tilde{f}_p$ nazývame kosínusový rad funkcie f, Fourierov rad funkcie $\tilde{f}_n$ nazývame sínusový rad funkcie f.

Veta. *Nech funkcia $f : [0, \frac{T}{2}] \to R$ je po častiach spojite diferencovateľná.*
Rad

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t,$$

v ktorom

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt,$$
$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}t\,dt,$$

je kosínusový rad funkcie f konvergujúci k $\tilde{f}_p$.

Rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{2k\pi}{T}t,$$

v ktorom

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}t\,dt,$$

nazývame sínusový rad funkcie f konvergujúci k $\tilde{f}_n$.

Veta o Parsevalovi. *Nech funkcia $f : R \to R$ je periodická s periódou T a po častiach spojitá, a*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t$$

jej Fourierov rad.

Potom rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

je konvergentný a platí

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt.$$

Amplitúdový tvar Fourierovho radu.

Nech funkcia $f : R \to R$ je periodická s periódou T a po častiach spojitá. Jej Fourierov rad možno vyjadriť v amplitúdovom tvare nasledovne:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t - \varphi_k\right).$$

Pritom $a_k = A_k \cos\varphi_k$, $b_k = A_k \sin\varphi_k$.

Sčítanec

$$A_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t - \varphi_k\right)$$

je k–ta harmonická zložka, A_k jej amplitúda, φ_k jej fázový posun.

Postupnosť $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ nazývame amplitúdové, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ fázové spektrum funkcie f.

Parsevalova rovnosť má tvar

$$A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt.$$

Exponenciálny tvar Fourierovho radu.

Platí vzťah $e^it = \cos t + i \sin t$.

Podľa Moivreovej vety je $(\cos t + i \sin t)^n = (\cos nt + i \sin nt) = e^{int}$.

Pretože

$$(\cos nt - i \sin nt) = e^{-int}$$

je

$$\cos n\omega t = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2}$$

$$\sin n\omega t = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}.$$

Z toho vyplýva

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t}.$$

Nech funkcia $f : R \to R$ je periodická s periódou T a po častiach spojitá. Jej Fourierov rad prepíšeme do exponenciálneho tvaru nasledovne:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t =$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\frac{2k\pi}{T}t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\frac{2k\pi}{T}t} =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi}{T}t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi}{T}t}.$$

Teda rad

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi}{T}t},$$

kde

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i\frac{2k\pi}{T}t}\, dt,$$

nazývame Fourierov rad funkcie f v exponenciálnom tvare.

Parsevalova rovnosť v exponenciálnom tvare

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2\, dt.$$