Neurčitý integrál.

V tejto kapitole znakmi I, J označujeme intervaly na reálnej osi.

Definícia 1. Nech I je interval, $f : I \to R$ je reálna funkcia.

Funkciu $F : I \to R$ takú, že pre každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$, nazývame primitívna funkcia k funkcii f.

Veta. *Nech F_1 a $F_2 : I \to R$ sú dve primitívne funkcie k funkcii $f : I \to R$.*

Potom $F_1 - F_2 = c$.

Označenie $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Elementárne vzorce.

1 $\int 0\,dx = c$

2 $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \in Z \setminus \{-1\} \quad$ a aj pre $n \in R \setminus \{-1\}$

3 $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

4 $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

5 $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

6 $\int e^x\,dx = e^x + c$

7 $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \qquad a \neq 1,\ a > 0$

8 $\int \dfrac{1}{cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c \qquad \frac{\pi}{2} + k\pi \notin I$

9 $\int \dfrac{1}{sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c \qquad \pi \notin I$

10 $\int \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

11 $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad I \subset (-1, 1)$

12 $\int \dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + c$

Veta. *Každá funkcia spojitá na intervale I má na tomto intervale primitívnu funkciu.*

Veta. *Nech $F, G : I \to R$ sú primitívne funkcie k $f, g : I \to R$ a nech $\alpha \in R$.*

Potom $F + G$ je primitívna funkcia k $f + g$, αF je primitívna funkcia k αf.

Metóda per partes.

Veta. *Nech $f, g : I \to R$ sú spojité a diferencovateľné funkcie.*

Potom

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

Substitučná metóda.

Veta o substitúcii I. *Nech $\phi : I \to J$ je spojito diferencovateľná funkcia, $f : J \to R$ je spojitá funkcia. Nech $F : J \to R$ je primitívna funkcia k f.*

Potom $F(\phi(x))$ je primitívna funkcia k $f(\phi(x))\phi'(x)$.

Teda ak

$$\int f(u)\,du = F(u),$$

tak

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)).$$

Dôsledok. *Nech $g : I \to R$ je spojito diferencovateľná funkcia, $g(x) \neq 0$.*
Potom

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|.$$

Veta o substitúcii II. *Nech $\phi : I \to J$ je spojito diferencovateľná bijekcia, $f : J \to R$ je spojitá funkcia. Nech $G : I \to R$ je primitívna funkcia k $f(\phi(t))\phi'(t)$.*
Potom $G(\phi^{-1}(x))$ je primitívna funkcia k $f(x)$.

Teda ak

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = G(t),$$

tak

$$\int f(x)\,dx = G(\phi^{-1}(x)).$$

Na záver tejto časti uvedieme niekoľko typických substitúcií, ktoré sú dôsledkom Vety o substitúcii I.

Dôsledok. *Nech $f : J \to R$ má primitívnu funkciu F.*
Potom

$$\int f(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\int f(u)\,du = \frac{1}{b}F(u) = \frac{1}{b}F(a+bx),$$

Nech naviac $J \subset [-1, 1]$.
Potom

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(u)\,du = F(u) = F(\sin x),$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(u)\,du = -F(u) = -F(\cos x),$$

Určitý integrál.

V tejto časti je $I = [a, b] \subset R$ uzavretý a ohraničený interval.

Definícia. Nech $I = [a, b] \subset R$ je interval.

Konečnú postupnosť $D = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$, $x_i \in I$, $x_i < x_j$ pre $i < j$ nazývame delením intervalu I.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je ohraničená funkcia. Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, je delenie intervalu I.

Potom číslo

$$\underline{S}(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

kde m_i je infimum funkcie f na intervale $[x_{i-1}, x_i]$, nazývame dolný integrálny súčet funkcie f pre delenie D.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je ohraničená funkcia. Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, je delenie intervalu I.

Potom číslo

$$\bar{S}(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

kde M_i je suprémum funkcie f na intervale $[x_{i-1}, x_i]$, nazývame horný integrálny súčet funkcie f pre delenie D.

Definícia. Ohraničená funkcia $f : I \to R$ sa nazýva integrovateľná (Riemannovsky) ak existuje jediné číslo S také, že pre každé delenie D intervalu I platí

$$\underline{S}(D, f) \le S \le \bar{S}(D, f).$$

Číslo S nazývame určitý integrál funkcie f na intervale I.

Používa sa označenie

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Veta. *Nech $f : I \to R$ je ohraničená funkcia a nech má konečne veľa bodov nespojitosti. Potom f je integrovateľná funkcia.*

Veta. *Nech f a $g : I \to R$ sú dve Riemannovsky integrovateľné funkcie, a nech $\alpha, \beta \in R$ sú konštanty.*

Potom

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Nech $c \in I$ a nech $f : I \to R$ je Riemannovsky integrovateľná funkcia.

Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Definícia. Ak $a < b$ a $f : [a, b] \to R$ je integrovateľná funkcia, tak definujeme

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Zrejme

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Veta. *Nech $f : [a, b] \to R$ je Riemannovsky integrovateľná funkcia.*
Potom $|f|$ je Riemannovsky integrovateľná funkcia a platí:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Veta. *Nech f a $g : I \to R$ sú dve Riemannovsky integrovateľné funkcie, a nech $f(x) \leq g(x)$.*
Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Veta. *Nech f a $g : I \to R$ sú dve Riemannovsky integrovateľné funkcie, a nech $f(x) \neq g(x)$ len pre konečne veľa $x_i \in I$.*
Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Veta. *Nech $f : I \to R$ je spojitá Riemannovsky integrovateľná funkcia.*
Potom existuje $c \in I$ také, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Číslo $f(c)$ nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale I.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je Riemannovsky integrovateľná funkcia.
Číslo

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale I.

Nasleduje základná veta integrálneho počtu o vzťahu medzi primitívnou funkciou a určitým integrálom.

Veta. *Nech $f : I \to R$ je spojitá Riemannovsky integrovateľná funkcia.*
Potom funkcia $F : I \to R$

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

je primitívna funkcia k funkcii f

Dôsledok. *(Newton-Leibnitz) Nech $f : I \to R$ je spojitá funkcia.*
Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Metóda per partes pre určitý integrál.

Veta. *Nech $f, g : I \to R$ sú spojité a diferencovateľné funkcie.*
Potom

$$\int_a^b f' g\, dx = [fg]_a^b - \int_a^b f g'\, dx$$

Substitučná metóda pre určitý integrál.

Veta o substitúcii I. *Nech $\phi : I = [a, b] \to J$ je spojito diferencovateľná funkcia, $f : J \to R$ je spojitá funkcia. Nech $F : J \to R$ je primitívna funkcia k f. Nech $\phi(a) = \alpha$, $\phi(b) = \beta$.*
Potom

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(u)\, du = F(\beta) - F(\alpha).$$

Veta o substitúcii II. *Nech $\phi : I \to J = [a, b]$ je spojito diferencovateľná bijekcia na J, $f : J \to R$ je spojitá funkcia. Nech $G : I \to R$ je primitívna funkcia k $f(\phi(t))\phi'(t)$.*
Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\, dt = G(\phi^{-1}(b)) - G(\phi^{-1}(a)).$$

Dôsledok. *Nech $f : [-a, a] \to R$ je Riemannovsky integrovateľná funkcia.*
Ak f je nepárna funkcia, tak

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0.$$

Ak f je párna funkcia, tak

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx.$$

Niektoré aplikácie určitého integrálu.

1 Obsah oblasti.
Majme oblasť ohraničenú grafmi funkcii f a g, $f : I \to R$, $g : I \to R$, $f(x) \le g(x)$.

$$A = \{[x, y] \in R^2;\ x \in I,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$

Obsah oblasti A je

$$P(A) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

2 Objem rotačneho telesa.
Majme oblasť A ohraničenú grafom funkcie f, $f : I \to R$, osou x a dvoma priamkami $x = a$, $x = b$.

$$A = \{[x, y] \in R^2;\ x \in I,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti A okolo osi x je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

3 Dĺžka oblúka.
Majme graf funkcie $f : I \to R$.

$$G = \{[x, y] \in R^2;\ x \in I,\ y = f(x)\}.$$

Potom dĺžka oblúka G je

$$d(G) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

4 Obsah rotačnej plochy.
Majme oblasť A ohraničenú grafom funkcie f, $f : I \to R$, osou x a dvoma priamkami $x = a$, $x = b$.

$$A = \{[x, y] \in R^2;\ x \in I,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

Obsah rotačnej plochy telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti A okolo osi x je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

5 Statický moment.
Statický moment oblasti $A = \{[x, y] \in R^2;\ x \in I,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ s jednotkovou hustotou vzhľadom na os y je

$$M = \int_a^b x(g(x) - f(x))\, dx.$$

6 Moment zotrvačnosti.
Moment zotrvačnosti oblasti A s jednotkovou hustotou vzhľadom na os y je

$$J = \int_a^b x^2(g(x) - f(x))\, dx.$$

Integrovanie racionálnych funkcií.

Nech $P(x), Q(x) : R \to R$ sú polynomické funkcie, a nech x_i, $i = 1, \ldots, n$ sú korene $Q(x)$. Racionálna funkcia $R(x) : I \to R$ je funkcia

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

definovaná na $I \subset R \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Delením polynómu $P(x)$ polynómom $Q(x)$ prevedieme $R(x)$ na tvar

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

kde stupeň polynómu $P_2(x)$ je menší ako stupeň polynómu $Q(x)$.

Rýdzo racionálnu funkciu $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ rozložíme na parciálne zlomky nad poľom R.

Pri integrovaní racionálnych funkcií teda stačí vedieť integrovať polynómy a jednotlivé typy parciálnych zlomkov.

1 Polynómy.

$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}.$

2 Zlomky typu $\dfrac{a}{x+p}$.

$\int \dfrac{a}{x+p} \, dx = \ln(x+p).$

3 Zlomky typu $\dfrac{a}{(x+p)^n}$.

$\int \dfrac{a}{(x+p)^n} \, dx = \dfrac{-1}{n-1} \dfrac{a}{(x+p)^{(n-1)}}.$

4 Zlomky typu $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)}$.

$\int \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)} \, dx = \dfrac{a}{2} \int \dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)} \, dx + \dfrac{2b-ap}{2} \int \dfrac{1}{(x^2+px+q)} \, dx.$

Pritom

$\int \dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)} \, dx = \ln|(x^2+px+q)|,$

a

$\int \dfrac{1}{(x^2+px+q)} \, dx = \int \dfrac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} \, dx = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{(x+\frac{p}{2})^2}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$

5 Zlomky typu $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^{(n+1)}}$.

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^{(n+1)}} \, dx =$$

$$= \frac{a}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{(n+1)}} \, dx + \frac{2b-ap}{2} \int \frac{1}{(x^2+px+q)^{(n+1)}} \, dx.$$

Pritom

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{(n+1)}}\,dx = \frac{-1}{n}\frac{1}{(x^2+px+q)^n},$$

a

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{(n+1)}}\,dx = \int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4}))^{(n+1)}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(q-\frac{p^2}{4})^{n+\frac{1}{2}}}\int \frac{1}{(u^2+1)^{(n+1)}}\,du.$$

Stačí teda vedieť integrovať

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^{(n+1)}}\,du.$$

Označme

$$I_n = \int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$$

a počítajme ho metódou per partes

$$I_n = \int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du = u\frac{1}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{u^2}{(u^2+1)^{(n+1)}}\,du =$$

$$= u\frac{1}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du - 2n\int \frac{1}{(u^2+1)^{(n+1)}}\,du =$$

$$= u\frac{1}{(u^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

Pre $n=1$ je $I_1 = \operatorname{arctg} u$.
Rekurentne zo vzťahu

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{2n}u\frac{1}{(u^2+1)^n}$$

vypočítame I_n pre ľubovoľné n.
Pre $n=2$ je $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}u\frac{1}{(u^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} u + u\frac{1}{(u^2+1)}\right)$.