Cvičenie 9.

Dvojný integrál (pokračovanie).

Veta (Fubíni na elementárnej oblasti). *Nech M_{xy} je elementárna oblasť typu xy a nech $f : M \to R$ je integrovateľná funkcia. Nech pre každé $x \in [a,b]$ existuje integrál*

$$K(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$$

Potom

$$\iint_M f(x,y)\, dxdy = \int_a^b K(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Vypočítajte dvojný integrál na elementárnej oblasti M

8. $\displaystyle\iint_M 1 + xy^2\, dxdy$ ak M je ohraničená priamkami $x = 1$, $y = 2x$, $y = 0$.

9. $\displaystyle\iint_M 1\, dxdy$ ak M je ohraničená krivkami $xy = 1$, $x + y = \frac{5}{2}$.

10. $\displaystyle\iint_M \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$ ak M je ohraničená krivkami $xy = 1$, $y = 4x$, $x = 3$.

11. $\displaystyle\iint_M \frac{x}{3}\, dxdy$ ak M je ohraničená krivkami $x = 2 + \sin y$, $x = 0$, $y = 2\pi$, $y = 0$.

12. Vypočítajte obsah oblasti M, ktorá je ohraničená krivkami $x = 2 + \sin y$, $x = 0$, $y = 2\pi$, $y = 0$.

13. $\displaystyle\iint_M \frac{y}{x^2 + y^2}\, dxdy$ ak M je ohraničená krivkami $y^2 = 2x$, $y = x$, a nerovnosťou $x \geq 1$.

14. $\displaystyle\iint_M xy\, dxdy$ ak M je ohraničená krivkami $2x = y^2$, $y = x - 4$.

15. $\displaystyle\iint_M x^2 y\, dxdy$ ak M je ohraničená nerovnosťami $y \geq 0$, $y \leq 1 - |x|$.

16. $\displaystyle\iint_M \ln y\, dxdy$ ak M je trojuholník ABC $A = [0,1]$, $B = [1,1]$, $C = [1,3]$

Výsledky

8. $\dfrac{23}{15}$ 9. $\dfrac{15}{8} - \ln 4$ 10. $\dfrac{1225}{64}$ 11. $\dfrac{3\pi}{2}$ 12. 4π

13. $\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\ln 32$ 14. 90 15. $\dfrac{1}{30}$ 16. $\frac{9}{4}\ln 3 - 2$