TEST 7.

Viazané extrémy funkcie viacerých premenných.

Príklad. Je daná funkcia dvoch premenných
$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, a podmienka $xy = 1$.

Úlohy:

Napíšte definičný obor funkcie f.
Nakreslite množinu bodov, ktoré spĺňajú zadanú podmienku.
Nájdite body viazaných extrémov funkcie f pri danej podmienke.
Vypočítajte hodnotu viazaných extrémov.

Riešenie:

Definičný obor je $D_f = R^2 \setminus \{[0,0]\}$.
Podmienkou je určená dvojica hyperbol $y = \frac{1}{x}$.
Parametrizácia podmienky je napr. $\varphi(t) = (t, \frac{1}{t})$. (Priame dosadenie je tiež v poriadku.)
$h(t) = \ln(t^2 + \frac{1}{t^2})$
$h'(t) = \frac{1}{(t^2+\frac{1}{t^2})} \cdot (2t - \frac{2}{t^3}) = 2\dfrac{t^4-1}{t^5+t}$
Stacionárne body h sú riešenia rovnice
$t^4 - 1 = 0$
Rovnica má dva reálne korene $t_1 = -1$ a $t_2 = 1$. (Bod $0 \notin D_h$.)
Z nich dostaneme body $A = [-1,-1]$ a $B = [1,1]$.
Pre $t < -1$ je $h'(t) < 0$, pre $-1 < t < 0$ je $h'(t) > 0$, pre $0 < t < 1$ je $h'(t) < 0$ a pre $1 < t$ je $h'(t) > 0$.
Preto $t_1 = -1$ a $t_2 = 1$ sú body ostrého lok. minima funkcie h a teda $A = [-1,-1]$ a $B = [1,1]$ sú body viazaného ostrého lokálneho minima funkcie f.
(Alebo vypočítame $h''(t)$ a rozhodneme podľa znamienka v bodoch $t_1 = -1$ a $t_2 = 1$.)
$f(1,1) = \ln 2 = f(-1,-1)$.
Koniec.