Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y}.$$

a, Vypočítajte parciálnu deriváciu $f'_x(x,y)$ v bodoch rôznych od bodu $[0,0]$, v ktorých je definovaná.

b, Použitím definície vypočítajte parciálne derivácie $f'_x(0,0)$ a $f'_y(0,0)$.

c, Vypočítajte deriváciu funkcie f v bode $[1,7]$
v smere danom vektorom $\vec{u} = (3,4)$.

d, Napíšte jednotkový vektor $\vec{v}$, ktorý je v bode $[1,7]$ dotykový vektor k vrstevnici funkcie f.

V každej časti napíšte celý postup riešenia.

Riešenie 1. a,

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{(x^3+y)^{\frac{2}{3}}},$$

pre $y \neq -x^3$.

b, $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{x-0} = 1$ a

$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^{\frac{1}{3}}-0}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{y^{\frac{2}{3}}} = \infty$, preto $f'_y(0,0)$ neexistuje.

c,

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x^3+y)^{\frac{2}{3}}},$$

$$f'_x(1,7) = \frac{1}{4}, \qquad f'_y(1,7) = \frac{1}{12}$$

Vektor $\vec{u}$ má dĺžku $|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5$.
Jednotkový vektor v rovnakom smere je vektor $\vec{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
Preto

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,7) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{13}{60}.$$

d, Vektor v smere vrstevnice je kolmý na gradient, preto

$$\frac{\mathrm{grad} f(1,7)}{|\mathrm{grad} f(1,7)|} = \frac{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)}{\sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{12})^2}} = \left(\tfrac{3}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Kolmý vektor je $\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.
(Alebo $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, stačí uviesť jeden z nich.)

Príklad 2.

Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = xy(x+2y+2).$$

Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie 2.

Vypočítajme parciálne derivácie

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(x+2y+2) + xy = y(2x+2y+2)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(x+2y+2) + 2xy = x(x+4y+2)$.

Zo sústavy

$y(2x+2y+2) = 0, \qquad x(x+3y+2) = 0$

dostaneme stacionárne body $A = [0,0]$, $B = [0,-1]$, $C = [-2,0]$, $D = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$.

$$M = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x+4y+2 \\ 2x+4y+2 & 4x \end{pmatrix}$$

$$M(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2(A) = \det M(A) = -4 < 0.$$

Bod A je sedlový bod funkcie f.

$$M(B) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2(B) = \det M(B) = -4 < 0.$$

Bod B je sedlový bod funkcie f.

$$M(C) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$D_2(C) = \det M(C) = -4 < 0.$$

Bod C je sedlový bod funkcie f.

$$M(D) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$D_1(D) = -\frac{2}{3} < 0$$

$$D_2(D) = \det M(D) = \frac{4}{3} > 0.$$

Bod D je bod ostrého lokálneho maxima funkcie f.

Príklad 3.

Nájdite absolútne extrémy funkcie

$$f(x,y) = xy$$

na množine M ohraničenej nerovnosťami $x \le 1 - y^2$, $x \ge y^2 - 1$.

Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie 3.

(i) vo vnútri oblasti je stacionárny bod $A = [0, 0]$.

(ii) Počítajme stacionárne body funkcie

$$h(y) = f(1 - y^2, y) = y - y^3.$$

$$h'(y) = 1 - 3y^2.$$

Stacionárne body vzhľadom k $x = 1 - y^2$ sú $B = [\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $C = [\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$

Rovnako počítajme stacionárne body funkcie

$$h(y) = f(y^2 - 1, y) = y^3 - y.$$

$$h'(y) = 3y^2 - 1.$$

Stacionárne body vzhľadom k $x = y^2 - 1$ sú $D = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $E = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$.

(iii) priesečníky hraničných kriviek sú body $F = [0, 1]$ a $G = [0, -1]$.

Funkčné hodnoty $f(A) = 0 = f(F) = f(G)$, $f(B) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(E)$, $f(C) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = f(D)$, znamenajú, že absolútne maximum funkcie f je $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, v bodoch B a E a absolútne minimum funkcie f je $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, v bodoch C a D.

Príklad 4. Vypočítajte

$$\iint\limits_M xe^y \, dxdy$$

ak množina M je trojuholník s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$, $C = [3, 0]$.

Nakreslite množinu M.

Popíšte M ako elementárnu oblasť.

Pri výpočte integrálu napíšte celý postup.

Riešenie 4. Popis M ako elementárnej oblasti typu yx je

$$\begin{aligned} &0 \le y \le 1, \\ &y \le x \le 3 - 2y. \end{aligned}$$

Teraz

$$\begin{aligned}
\iint_M xe^y \, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_y^{3-2y} xe^y \, dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[x^2 e^y \right]_y^{3-2y} dy = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(9 - 12y + 3y^2 \right) e^y \, dy = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(9 - 12y + 3y^2 \right) e^y \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (12 - 6y) e^y \, dy = \\
&= -\frac{9}{2} + \left([(6 - 3y)e^y]_0^1 - 3 \int_0^1 e^y \, dy \right) = \\
&= -\frac{9}{2} + 3e - 6 + 3e - 3 = 6e - \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

Príklad 5. Použitím substitúcie vypočítajte

$$\iint\limits_M \frac{1}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

ak množina M je daná nerovnosťami $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge y$, $x \ge 0$.
Nakreslite množinu M.
Popíšte M ako elementárnu oblasť v polárnych súradniciach.
Pri výpočte integrálu napíšte celý postup.

Riešenie 5. Popis M ako elementárnej oblasti typu φr je

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{4},$$
$$0 \le r \le 1.$$

Preto

$$\begin{aligned}\iint_M \frac{1}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 \frac{r}{4+r}\varphi\,dr\right) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 1-\frac{4}{4+r}\varphi\,dr\right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left[r-4\ln|4+r|\right]_0^1 d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 1-4\ln 5+4\ln 4\,d\varphi = \\ &= \left(1-4\ln\frac{5}{4}\right)[\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(1-4\ln\frac{5}{4}\right)\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$