Príklad 1. Je daná funkcia
$$f(x,y) = \ln(xy+y).$$

a, Nájdite definičný obor funkcie f a nakreslite ho.
b, Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu f v bode $[1,e]$.
c, Napíšte prvý diferenciál funkcie f v bode $[1,e]$.
d, Vypočítajte deriváciu funkcie f v bode $[1,e]$
v smere danom vektorom $\vec{u} = (2,e)$.

Riešenie 1.

a, $D_f = \{[x,y];\ (x > -1 \wedge y > 0) \vee (x < -1 \wedge y < 0)\}$
b, $f(1,e) = \ln 2e = \ln 2 + 1$.
$f'_x(x,y) = \dfrac{1}{x+1}, \qquad f'_x(1,e) = \dfrac{1}{2}.$
$f'_y(x,y) = \dfrac{1}{y}, \qquad f'_x(1,e) = \dfrac{1}{e}.$
Rovnica dotykovej roviny v bode $[1,e]$ je
$z - \ln 2e = \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{e}(y-e).$
c, Prvý diferenciál v bode $[1,e]$ je
$df(x,y,1,e) = \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{e}(y-e).$
d, Vektor $\vec{u}$ má dĺžku $|\vec{u}| = \sqrt{4+e^2}$.
Jednotkový vektor v rovnakom smere je vektor $\left(\frac{2}{\sqrt{4+e^2}}, \frac{e}{\sqrt{4+e^2}}\right)$.
Preto
$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,e) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{e}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{4+e^2}}, \frac{e}{\sqrt{4+e^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{4+e^2}}$

Príklad 2. Je daná funkcia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a, Vypočítajte parciálnu deriváciu $f'_x(x,y)$ v bodoch rôznych od bodu $[0,0]$.
b, Vypočítajte parciálne derivácie $f'_x(0,0)$ a $f'_y(0,0)$.
c, Pomocou definície rozhodnite, či je funkcia f diferencovateľná v bode $[0,0]$.

Riešenie 2.

a, $f'_x(x,y) = \dfrac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ pre $[x,y] \neq [0,0]$.
b, $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x-0} = 0$ a
$f'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{y-0} = 0.$
c, Počítajme limitu
$\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)(x-0) - f'_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Pri zúžení $\varphi(t) = (t, t)$ dostaneme limitu
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{t^3}{2t^2}}{\sqrt{2}t} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$
Pretože limita pri zvolenom zúžení nie je nula, ani pôvodná limita nemôže byť nulová, a teda funkcia nie je diferencovateľná v bode $[0, 0]$.

Príklad 3. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 24xy + 5.$$

Riešenie 3.
Vypočítajme parciálne derivácie
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 24y,$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 24y^2 - 24x.$
Zo sústavy
$3x^2 - 24y = 0, \qquad 24y^2 - 24x = 0$
dostaneme dosadením $x = y^2$ z druhej do prvej rovnice
$y^4 - 8y = 0.$
Rovnica má dve riešenia $y_1 = 0$ a $y_2 = 2$.
Stacionárne body sú teda
$A = [0, 0]$ a $B = [4, 2]$.

$$D = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -24 \\ -24 & 48y \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2(A) = \det D(A) = -24^2 < 0.$$

Bod A je sedlový bod funkcie f.

$$D(B) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 96 \end{pmatrix}$$

$$D_1(B) = 24 > 0, \qquad D_2(B) = \det D(B) = 24 \cdot 96 - 24^2 > 0.$$

Bod B je bodom ostrého lokálneho minima funkcie f.

Príklad 4. Použitím substitúcie vypočítajte

$$\iint\limits_M x\,dxdy$$

ak množina M je daná nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 4y$, $x \geq 0$.
Nakreslite množinu M.
Popíšte M ako elementárnu oblasť v polárnych súradniciach.

Riešenie 4. Popis M ako elementárnej oblasti typu φr je

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$
$$0 \le r \le 4\sin\varphi.$$

Preto

$$\iint_M x\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4\sin\varphi} r^2 \cos\varphi\,dr \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos\varphi \right]_0^{4\sin\varphi} d\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} 64 \sin^3\varphi \cos\varphi\,d\varphi = \frac{16}{3} \left[\sin^4\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}.$$

Príklad 5. Vypočítajte

$$\iint\limits_M y e^x\,dxdy$$

ak ohraničená množina M je daná nerovnosťami $x \le y+2$, $x \ge y^2$.
Nakreslite množinu M.
Popíšte M ako elementárnu oblasť.

Riešenie 5. Popis M ako elementárnej oblasti typu yx je

$$-1 \le y \le 2,$$
$$y^2 \le x \le y+2.$$

Teraz

$$\iint_M y e^x\,dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{y^2}^{y+2} y e^x\,dx \right) dy = \int_{-1}^{2} \left[y e^x \right]_{y^2}^{y+2} dy =$$
$$= \int_{-1}^{2} \left(y e^{y+2} - y e^{y^2} \right) dy = \int_{-1}^{2} y e^{y+2}\,dy - \int_{-1}^{2} y e^{y^2}\,dy.$$

Prvý integrál počítame metódou per partes, druhý pomocou substitúcie $z = y^2$.

$$\int_{-1}^{2} y e^{y+2}\,dy = \left[y e^{y+2} \right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} e^{y+2}\,dy = 2e^4 + e - \left[e^{y+2} \right]_{-1}^{2} = e^4 + 2e.$$

$$\int_{-1}^{2} y e^{y^2}\,dy = \frac{1}{2} \int_{1}^{4} e^z\,dz = \frac{1}{2}(e^4 - e).$$

Spolu

$$\iint_M y e^x\,dxdy = e^4 + 2e - \frac{1}{2}(e^4 - e) = \frac{1}{2} e^4 + \frac{5}{2} e.$$