Milí naši študenti, predpokladám, že sa odviazali a viazané extrémy ste zvládli za 5 bodov, podobne aj elementárne oblasti a teraz sa už pokojne môžete pustiť do riešenia integrálov!

Príklad 10. Vypočítajte dvojný integrál na elementárnej oblasti M, ak

$\iint_M \frac{x^2}{y^2}\, dxdy,$ a M je ohraničená krivkami $xy = 1,\ y = 4x,\ x = 3.$

Riešenie.

Nakreslite si ju. M je elementárna oblasť typu *xy*, zistíme priesečník kriviek $y = \frac{1}{x}$ a $y = 4x.$

(Riešime sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych). Ak dáme do rovnosti vyjadrenia y dostaneme kvadratickú rovnicu $4x^2 = 1$, ktorej korene sú $x = \pm\frac{1}{2}$. Z obrázka je zrejmé, že pre popis oblasti M je potrebný koreň $x = +\frac{1}{2}$. Odtiaľ dostaneme, že $\frac{1}{2} \le x \le 3.$

Pre takéto x je $\frac{1}{x} \le 4x$, preto daná oblasť M je zdola ohraničená krivkou $y = \frac{1}{x}$ a zhora priamkou $y = 4x$, a teda $\frac{1}{x} \le y \le 4x$. Spolu s prvou podmienkou dostávame

$$\frac{1}{2} \le x \le 3,$$
$$\frac{1}{x} \le y \le 4x.$$

Najprv vypočítame $K(x)$

$$K(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\, dy$$

$K(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\, dy = x^2 \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{4x} = x^3 - \frac{1}{4}x$

Teraz $\iint_M \frac{x^2}{y^2}\, dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{3} (x^3 - \frac{1}{4}x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{1}{2}}^{3} = \frac{1225}{64}.$

Príklad 11. Vypočítajte dvojný integrál na elementárnej oblasti M, ak

$\iint_M \frac{x}{3} dxdy$, a M je ohraničená krivkami $x = 2 + siny, x = 0, \ y = 2\pi, \ y = 0.$

Riešenie.

Ak si nakreslite M, je zrejmé, že M je elementárna oblasť typu yx.

$$0 \leq y \leq 2\pi,$$
$$0 \leq x \leq 2 + siny.$$

Najprv vypočítame

$$K(y) = \int_0^{2+siny} \frac{x}{3} dx$$

$$\int_0^{2+siny} \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2+siny} = \frac{1}{6} (2 + siny)^2$$

Teraz $\iint_M \frac{x}{3} dxdy$= $\frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (2 + siny)^2 dy$= $\frac{1}{6}\int_0^{2\pi} \ (4 + 4siny + sin^2 y) \ dy$ =

$\frac{1}{6}\left[4y - 4cosy + \frac{1}{2}\left(y - \frac{sin2y}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$= $\frac{3}{2}\pi.$

(Využili sme pri integrovaní rovnosť $sin^2 y = \frac{1-cos2y}{2}.$)

Pr.13 vám dá zabrať, ale je za bod !!Pošlite mi riešenie!

Posielajte riešenie na mail: elena.pastuchova@stuba.sk, ja som ten Mikuláš, ktorý dáva body za bonusové príklady!

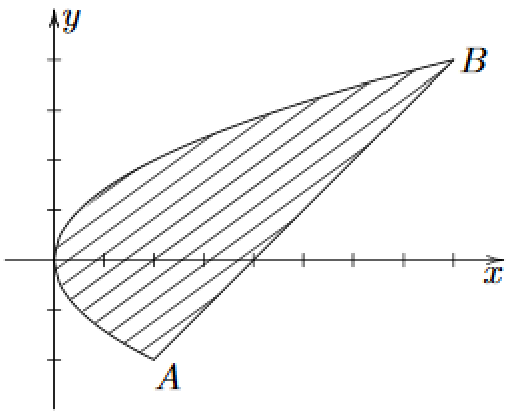
Príklad 14. Vypočítajte dvojný integrál na elementárnej oblasti M, ak

$$\iint_M xy\, dxdy$$

a M je ohraničená krivkami $2x = y^2$ a $y = x - 4$.

Riešenie.

Takto približne vyzerá M:



Z obrázku vidíte, že M elementárna oblasť typu yx. Musíme zistiť priesečník kriviek $2x = y^2$ a $y = x - 4$ .Vyjadríme $x = \frac{y^2}{2}$ a $x = y + 4$

(Riešime sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych). Ak dáme do rovnosti

vyjadrenia *x* dostaneme kvadratickú rovnicu $y^2 - 2y - 8 = 0$, ktorej korene sú

$y_1 = 4$, $y_2 = -2$ a je zrejmé, že $-2 \leq y \leq 4$ a tiež, že daná oblasť je

je zdola ohraničená parabolou $x = \frac{y^2}{2}$ a zhora priamkou $x = y + 4$

a teda $\frac{y^2}{2} \leq x \leq y + 4$. Spolu s prvou podmienkou dostávame

$$-2 \leq y \leq 4,$$

$$\frac{y^2}{2} \leq x \leq y + 4.$$

Najprv vypočítame

$$K(y) = \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xy\, dx$$

$$K(y) = \left[\frac{x^2}{2} y\right]_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}$$

$\iint_M xydxdy = \int_{-2}^{4}(\frac{(y+4)^2}{2} y - \frac{y^4}{8} y)\, dy = \int_{-2}^{4}(\frac{y^3+8y^2+16y}{2} - \frac{y^5}{8})\, dy =$

$\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} + 8\frac{y^3}{3} + 16\frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{48}\right]_{-2}^{4} = 90$.

Príklad 15. Vypočítajte dvojný integrál na elementárnej oblasti M, ak

$$\iint_M x^2ydxdy$$

a M je ohraničená nerovnosťami *y ≥ 0, y ≤ 1−|x|.*

Riešenie.

Ak si nakreslite M , je zrejmé, že je výhodnejšie, keď M považujeme za elementárnu oblasť typu yx.

$$0 \le y \le 1,$$

$$y - 1 \le x \le 1 - y.$$

Najprv vypočítame

$$K(y) = \int_{y-1}^{1-y} x^2 y\, dx = y\left[\frac{x^3}{3}\right]_{y-1}^{1-y}$$

$\iint_M x^2ydxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 y(1-y)^3 - y(y-1)^3\, dy =$

$\frac{1}{3}\int_0^1 y - 3y^2 + 3y^3 - y^4 - (y^4 - 3y^3 + 3y^2 - y)dy =$

$\frac{1}{3}\left[y^2 - 2y^3 + \frac{3}{2}\, y^4 - \frac{2}{5}\, y^5\right]_0^1 = \frac{1}{30}.$