Milí naši študenti, predpokladám, že už ste sa prepracovali cez diferenciálny počet, urobili ste si testy v Moodle, získali bonusové body a plný chuti ste sa pustili do prvej prednášky z integrálneho počtu!

Musíte uznať, že aj keď je to matematický text, je maximálne zrozumiteľný!!!

Pokúsim sa tiež zrozumiteľne vyriešiť pár príkladov a tiež ponúknuť možnosť získať bonusové body.

Príklad 1. Popíšte množinu M ako elementárnu oblasť typu xy alebo yx , ak

M je trojuholník ABC , kde $A = [0,1];\ B = [1,1];\ C = [1,3]$.

Riešenie.

Trojuholník ABC je elementárna oblasť typu xy. (Nakreslite si ho.) Najprv si všimnime, že všetky body trojuholníka majú x-ovú súradnicu $0 \le x \le 1$

Trojuholník je zdola ohraničený úsečkou AB, a zhora je ohraničený úsečkou AC. Táto leží na priamke $y - 1 = \frac{3-1}{1-0}(x - 0)$ čiže $y = 2x + 1$.

(Ak $A=[x_1, y_1]$ a $C=[x_2, y_2]$, potom priamka, na ktorej leží úsečka AC

má rovnicu $y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$.)

Teda $1 \le y \le 2x + 1$ a spolu s prvou podmienkou dostávame

$$0 \le x \le 1$$

$$1 \le y \le 2x + 1$$

Tento trojuholník môžeme chápať ako elementárnu oblasť typu yx.

Popíšte ju a pošlite za plusko.

Príklad 4. Popíšte množinu M ako elementárnu oblasť typu xy alebo yx , ak

M je ohraničená krivkami $xy = 2$ a $x + y = 3$.

Riešenie.

Množina M je elementárna oblasť typu xy. (Nakreslite si ju.)

Čiže jednu vetvu hyperboly $y = \frac{2}{x}$ v prvom kvadrante „pretneme“ priamkou $y = 3 - x$.

Najprv zistíme, priesečník oboch kriviek. (Riešime sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych.)

Keďže $xy = 2$ potom $y = \frac{2}{x}$ a tiež keďže $x + y = 3$ potom $y = 3 - x$.

Ak dáme do rovnosti vyjadrenia *y* dostaneme kvadratickú rovnicu

$x^2 - 3x + 2 = 0$, ktorej korene sú

$x_1 = 1$ a $x_2 = 2$ a je zrejmé, že $1 \le x \le 2$ a tiež, že daná oblasť je

je zdola ohraničená krivkou $y = \frac{2}{x}$ a zhora priamkou $y = 3 - x$

a teda $\frac{2}{x} \le y \le 3 - x$.

spolu s prvou podmienkou dostávame

$$1 \le x \le 2$$
$$\frac{2}{x} \le y \le 3 - x.$$

Príklad 6.

Vypočítajte dvojný integrál na obdĺžniku $\iint_M ye^{x+y}dxdy$

Riešenie.

Použijeme Fubiniho vetu a teda

$$\int_0^1 \int_0^2 ye^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 ye^{x+y}\,dy\right) dx =^{**}$$

Vypočítame najprv $\left(\int_0^2 ye^{x+y}\,dy\right)$ pomocou metódy per partes, (premenná je y, konštanta je x)

$$f = y \quad f' = 1$$
$$g' = e^{x+y} \quad g = e^{x+y}$$

potom

$\left(\int_0^2 ye^{x+y}\,dy\right)$=$[ye^{x+y}]_0^2-\left(\int_0^2 e^{x+y}\,dy\right)$=$2e^{x+2}-0-[e^{x+y}]_0^2$ = e^{x+2} +e^{x}

Pokračujeme

$**= \int_0^1\left(\int_0^2 ye^{x+y}\,dy\right)dx=\int_0^1 e^{x+2}\;+e^{x}dx$ = $[e^{x+2}\;+e^{x}]_0^1$=

$e^3\;+e^1-e^2-1.$

Pr.7 počítame podobne, pošlite mi riešenie za plusko.