Milí naši študenti, predpokladám, že už ste si naštudovali prednášku č.7.

Určite to urobte, stojí to za to, aj sa poučíte aj zasmejete!

Ponúkam niektoré riešenia aj možnosť nájsť chyby,

ktoré tam určite budú a navyše máte možnosť získať bonusové body.

Nájdite body viazaných extrémov funkcie viacerých premenných

Príklad 1.

$$f(x,y) = xy - x^2 + y^2 + 2x - 5y + 3, \quad \text{ak} \quad 2x + 3y = 1$$

Z podmienky $2x + 3y = 1$ dostaneme $y = \frac{1-2x}{3}$, rovnicu priamky.

Potom funkcia $\varphi(t)$ je daná parametricky $\varphi(t) = \left(t, \frac{1-2t}{3}\right)$.

Dosadíme do funkcie za x a za y; $f\left(t, \frac{1-2t}{3}\right) = \frac{-11t^2+47t+13}{9}$.

Označme ju

$h(t) = \frac{-11t^2+47t+13}{9}$ a hľadajme extrémy tejto funkcie jednej premennej.

$h'(t) = \frac{-22}{9}t + \frac{47}{9}$ a teda $h'(t) = 0$ pre $t_0 = \frac{47}{22}$.

Pretože $h''(t) = \frac{-22}{9} < 0$ bod $t_0 = \frac{47}{22}$ je bodom lokálneho maxima a teda bod

A=$\left(\frac{47}{22}, \frac{-12}{11}\right)$ je bodom viazaného lokálneho maxima funkcie $f(x,y)$.

Príklad 2 je jednoduchý, ale príklad 3 dá zabrať, ale vyplatí sa, dobré riešenie za bod.

Príklad 4.

$$f(x, y, z) = xyz, \quad \text{ak } x + y + z = 1.$$

Z podmienky $x + y + z = 1$ dostaneme $z = 1 - x - y$ a potom funkcia $h(x, y) = f(x, y, 1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2$ a hľadáme lokálne extrémy funkcie dvoch premenných.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = y - 2xy - y^2 = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = x - x^2 - 2yx = 0$$

Upravíme obe rovnice $y(1 - 2x - y) = 0$,

potom buď $y = 0$ alebo $(1 - 2x - y) = 0$,

$$x(1 - x - 2y) = 0,$$

potom buď $x = 0$ alebo $(1 - x - 2y) = 0$.

Riešenie sú: body (0,0) , (1,0), (0,1) a $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Matica druhých derivácií je

$$M = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

a.) Pre bod (0,0) je

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $d_2 = detM = -1 < 0$, je tam sedlový bod

b.) Pre bod (1,0) je

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ a $d_2 = detM = -1 < 0$ je tam sedlový bod

c.) Pre bod (0,1) je

$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $d_2 = detM = -1 < 0$ je tam sedlový bod

d.) Pre bod $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{-1}{3} & \dfrac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

$d_2 = detM = \frac{1}{3} > 0$ a $d_1 = \frac{-2}{3} < 0.$

Bod $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je bod O.L.MAX funkcie h.

Preto bod $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je bod viazaného O.L.MAX funkcie $f(x, y, z)$.

Príklad 5.

$f(x, y) = xy$ ak x^2+y^2=2.

Návod : Použite funkciu $\varphi(t) = \left(\sqrt{2}cost, \sqrt{2}\ sint\ \right)$

Využijeme pomôcku z návodu –

parametrické rovnice $\varphi(t) = \left(\sqrt{2}cost, \sqrt{2}\ sint\right)$.

Dosadením do funkcie f dostaneme $f\left(\sqrt{2}cost, \sqrt{2}sint\right) = \sqrt{2}cost. \sqrt{2}sint$=

$= 2cost.sint = sin(2t)$

Označme $h(t) = sin(2t)$ a hľadajme lokálne extrémy funkcie jednej premennej.

$h'(t) = 2cos2t = 2(cos^2t - sin^2t)$ a teda $h'(t) = 0$ práve vtedy, keď $|cost|$=$|sint|$ a tak dostaneme stacionárne body $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Pretože $h''(t)$=$-\ 4sin2t < 0$ pre body $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5\pi}{4}$, preto sú bodmi lokálneho maxima funkcie $h(t)$ a teda body A_1 =(1,1), (−1,−1) sú bodmi viazaného ostrého lokálneho maxima funkcie $f(x, y)$.

Pretože $h''(t)$=$-\ 4sin2t > 0$ ak $t_3 = \frac{3\pi}{4}$, $t_2 = \frac{7\pi}{4}$, preto sú bodmi lokálneho minima $h(t)$ a teda body A_3 =(-1,1), (1,−1) sú body viazaného ostrého lokálneho minima funkcie $f(x, y)$.

Nájdite absolútne extrémy funkcie f na uzavretej a ohraničenej množine *M.*

Príklad 4.

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad \text{ak } M = \{(x,y); |x| + |y| \le 1\}$$

Popíšeme množinu M, je to štvorec ABCD, kde A = [0,1], B = [1,0] , C = [0,-1] a D = [-1,0] (nakreslite si ho).

1.kvadrant $x + y \le 1$ potom hraničná priamka je $y = 1 - x$

2.kvadrant $-x + y \le 1$ potom hraničná priamka je $y = 1 + x$

3.kvadrant -$x - y \le 1$ potom hraničná priamka je $y = -1 - x$

4.kvadrant $x - y \le 1$ potom hraničná priamka je $y = -1 + x$

Najprv hľadáme lokálne extrémy vo vnútri štvorca:

Riešme sústavu dvoch rovníc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0$ potom $y = 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y = 0$ potom $x = 2y$

Riešenie je bod O=(0,0) leží v M a $f(0,0) = 0$

Hľadáme viazané extrémy:

Začneme 1.kvadrantom, úsečkou AB, pre ktorú je $y = 1 - x$. Dosadením do f dostaneme $f(x, 1-x) = 3x^2 - 3x + 1$

Označme $h(x) = 3x^2 - 3x + 1$ a počítajme $h'(x) = 6x - 3$

Preto $x = \frac{1}{2}$ je stacionárny bod a dopočítaním y-ovej súradnice dostávame

bod E= $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ktorý by mohol byť bodom viazaného extrému funkcie .

Pokračujeme 2.kvadrantom, úsečkou DA, pre ktorú $y = 1 + x$. Dosadením do f dostaneme

$$f(x, 1+x) = x^2 + x + 1$$

Označme $h(x) = x^2 + x + 1$ a počítajme $h'(x) = 2x + 1$

Preto $x = -\frac{1}{2}$ je stacionárny bod a dopočítaním y-ovej súradnice dostávame

bod F= $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ktorý by mohol byť ďalším bodom viazaného extrému funkcie.

Pokračujeme v 3.kvadrante, úsečkou CD, pre ktorú $y = -1 - x$. Dosadením do f dostaneme

$$f(x, -1 - x) = 3x^2 + 3x + 1$$

Označme $h(x) = 3x^2 + 3x + 1$ a počítajme $h'(x) = 6x + 3$

Preto $x = -\frac{1}{2}$ je stacionárny bod a dopočítaním y-ovej súradnice dostávame bod G= $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, ktorý by mohol byť bodom viazaného extrému funkcie.

A konečne v 4.kvadrante, úsečkou BC, pre ktorú $y = x - 1$. Dosadením do f dostaneme

$$f(x, x - 1) = x^2 - x + 1$$

Označme $h(x) = x^2 - x + 1$ a počítajme $h'(x) = 2x - 1$

Preto $x = -\frac{1}{2}$ je stacionárny bod a dopočítaním y-ovej súradnice dostávame bod H= $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, ktorý by mohol byť bodom viazaného extrému funkcie.

Na záver vypočítame hodnoty funkcie f .

f(O) = 0, f(A) = f(B)=f(C)=f(D)=1 , f(E)=f(G)= $\frac{1}{4}$ a f(F)=f(H)= $\frac{3}{4}$

Absolútne minimum funkcie je 0 a nadobúda ho funkcia v bode O.

Absolútne maximum funkcie je 1 a nadobúda ho funkcia v bodoch A,B,C,D.

Príklad 5.

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2 + 2y^2)\ ,\ M = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Množina M je kruh so stredom v počiatku a polomerom 2. (nakreslite)

Najprv hľadáme lokálne extrémy vo vnútri kruhu, riešením sústavy dvoch rovníc

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 2xe^{-x^2-y^2}(3 - 3x^2 - 2y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{-x^2-y^2}(2 - 3x^2 - 2y^2) = 0$$

Riešením je 5 bodov $A_1 = (0{,}0)$, $A_2 = (1{,}0)$, $A_3 = (-1{,}0)$, $A_4 = (0{,}1)$ a $A_5 = (0,-1)$ všetky ležia vo vnútri M. (skontrolujte si)

Hľadáme viazané extrémy:

Využijeme fakt, že funkčný predpis obsahuje len druhé mocniny premenných

a teda z podmienky $x^2 + y^2 = 4$ vyjadrime $y^2 = 4 - x^2$

Dosadením do f dostaneme

a.) $f(x, 4 - x^2) = e^{-4}(8 + x^2)$

Označme $h(x) = e^{-4}(8 + x^2)$ a počítajme $h'(x) = e^{-4}2x = 0$

Preto $x = 0$ je stacionárny bod doplníme druhú súradnicu, ale keďže $y^2 = 4 - x^2$ bude $y = \pm 2$ a dostávame body $A_6 = (0{,}2)$, $A_7 = (0,-2)$ ktoré by mohli byť bodmi viazaného extrému funkcie.

b.) Ak z podmienky $x^2 + y^2 = 4$ vyjadrime $x^2 = 4 - y^2$

a dosadíme do f dostaneme $f(4 - y^2, y) = e^{-4}(12 - y^2)$

Označme $g(y) = e^{-4}(12 - y^2)$ a počítajme $g'(y) = e^{-4}(-2y) = 0$

Preto $y = 0$ je stacionárny bod a znovu doplníme druhú súradnicu, ale keďže $x^2 = 4 - y^2$ bude $x = \pm 2$ a dostávame body $A_8 = (2{,}0)$, $A_9 = (-2, 0)$ ktoré by mohli byť bodmi viazaného extrému funkcie.

Na záver vypočítame hodnoty funkcie f .

f($A_1) = 0$, f($A_2) = \frac{3}{e}$ = f(A_3), f($A_4) = \frac{2}{e}$ = f(A_5), f($A_6) = \frac{8}{e^4}$ = f(A_7),

f($A_8) = \frac{12}{e^4}$ = f(A_9)

Absolútne minimum funkcie je 0 a nadobúda ho funkcia v bode A_1.

Absolútne maximum funkcie je $\frac{3}{e}$ a nadobúda ho funkcia v bodoch A_2 a A_3.