Cvičenie 7.

Viazané a absolutné extrémy funkcie viacerých premenných.

Viazané extrémy.

Majme danú funkciu $f(x,y)$ a podmienku $g(x,y)=0$. Ak $\varphi(t): R^2 \to R$ je taká funkcia jednej premennej t, pre ktorú $g(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=0$, tak lokálne extrémy zloženej funkcie $f(\varphi(t))$ nazývame viazané extrémy funkcie f vzhľadom na podmienku g.

Nájdite body viazaných extrémov funkcie viacerých premenných

1. $f(x,y)=xy-x^2+y^2+2x-5y+3$, ak $2x+3y=1$.
2. $f(x,y)=xy$, ak $x+y=1$.
3. $f(x,y)=\sin^2 x+\sin^2 y$, ak $x-y=\frac{\pi}{4}$.
4. $f(x,y,z)=xyz$, ak $x+y+z=1$.
5. $f(x,y)=xy$ ak $x^2+y^2=2$. Návod: Použite funkciu $\varphi(t)=(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t)$.

Výsledky

1. $[\frac{47}{22},-\frac{12}{11}]$ je bod viazaného ostrého lokálneho maxima
2. $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ je bod viazaného ostrého lokálneho maxima
3. Body $[\frac{\pi}{8}+k\pi,-\frac{\pi}{8}+k\pi]$, sú body viazaného ostrého lokálneho minima.
   Body $[\frac{5\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi]$, sú body viazaného ostrého lokálneho maxima.
5. Body $[1,-1]$, $[-1,1]$ sú body viazaného ostrého lokálneho minima.
   Body $[1,1]$, $[-1,-1]$ sú body viazaného ostrého lokálneho maxima.

Absolútne extrémy.

Veta. *Spojitá funkcia $f: A\subset R^2 \to R$ definovaná na ohraničenej a uzavretej oblasti A nadobúda na tejto oblasti absolútne maximum aj absolútne minimum.*

Absolútne extrémy môže funkcia nadobúdať buď

- vo vnútri oblasti A ako lokálne extrémy,
- alebo na hraničnej krivke ako viazané extrémy,
- alebo v bode, kde sa pretínajú dve hraničné krivky.

Nájdite absolútne extrémy funkcie f na uzavretej a ohraničenej množine M.

1. $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y \qquad M=\{(x,y);\ |x|\le 2,\ |y|\le 3\}$.
2. $f(x,y)=xy \qquad M=\{(x,y);\ x^2-1\le y\le 1-3x^2\}$.
3. $f(x,y)=xy(4-x-y) \qquad M=\{(x,y);\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 6\}$.
4. $f(x,y)=x^2-xy+y^2 \qquad M=\{(x,y);\ |x|+|y|\le 1\}$.
5. $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(3x^2+2y^2) \qquad M=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 4\}$.
6. $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y) \qquad M=\{(x,y);\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$.
7. $f(x,y,z)=x+y+z \qquad M=\{(x,y,z);\ x^2+y^2\le z\le 1\}$.
8. $f(x,y,z)=xy+yz+zx \qquad M=\{(x,y,z);\ x^2+y^2\le z\le 1\}$.

Výsledky

1. $\max f(x) = 29 \qquad \min f(x) = -5 \qquad H_f = \langle -5, 29 \rangle$
2. $\max f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad \min f(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad H_f = \langle -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}} \rangle$
3. $\max f(x) = \frac{64}{27} \qquad \min f(x) = -18 \qquad H_f = \langle -18, \frac{64}{27} \rangle$
4. $\max f(x) = 1 \qquad \min f(x) = 0 \qquad H_f = \langle 0, 1 \rangle$
5. $\max f(x) = \frac{3}{e} \qquad \min f(x) = 0 \qquad H_f = \langle 0, \frac{3}{e} \rangle$
6. $\max f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \min f(x) = 0 \qquad H_f = \langle 0, \frac{3\sqrt{3}}{2} \rangle$
7. $\max f(x) = 1 + \sqrt{2} \qquad \min f(x) = -\frac{1}{2} \qquad H_f = \langle -\frac{1}{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle$