Milí naši študenti, predpokladám, že už ste si naštudovali prednášku č.6.

Určite to urobte, stojí to za to, ak tomu chcete skutočne rozumieť! Nestačí krátky súhrn na začiatku sady príkladov.

Ponúkam riešenia niektorých príkladov.

Nájdite stacionárne body a body lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných ak:

Príklad 1.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Nájdime stacionárne body tejto funkcie.

Použijeme vetu o nutnej podmienke. Riešme sústavu dvoch rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0$$

Máme jediný stacionárny bod A=(0,0)

Druhé parciálne derivácie *f* sú:

$f''_{x\,x}$= 2 a f''_{xy}= 0 = f''_{yx} a tiež $f''_{yy} = 2$

Matica $M(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$d_1 = f''_{x\,x} = 2 > 0,$$

$$d_2 = detM(A) = 4 > 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod A bodom ostrého lokálneho minima. Jeho hodnota je *f(0,0) = 0.*

Príklady 2 a 3 nič komplikované-nebudem riešiť.

Príklad 4. Riešenie za plusko

Príklad 5. $f(x,y) = (y-x-2)^2$

Nájdime stacionárne body tejto funkcie.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2(y-x-2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y-x-2) = 0$$

Stacionárne body sú body priamky $y = x + 2$

$f''_{x\,x}$= 2   a f''_{xy}= - 2 = f''_{yx} a tiež $f\,''_{yy} = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = detM = 0$$

Sylvestrovo kritérium sa nedá použiť, ale skúsme definíciu.

V bodoch priamky $y = x + 2$ je $f(x,y) = 0$ a všade inde je $f(x,y) > 0$,

preto má funkcia neostré lokálne minimum v každom bode priamky $y = x + 2$.

Príklad 8.

$$f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y} \qquad pre\ \ x > 0, y > 0$$

Najprv nájdime stacionárne body tejto funkcie.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5y - \frac{25}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x - \frac{8}{y^2} = 0$$

Z prvej rovnice vyjadríme $y = \frac{5}{x^2}$ a dosadíme do druhej rovnice

$5x - 8\frac{x^4}{5^2} = 0$ a dostaneme $x(5^3 - 8x^3) = 0$

$x = 0$ nemôže byť riešením, taký bod nepatrí do definičného oboru, čiže máme jediný stacionárny bod A=$\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right)$

f''_{xx}= $\frac{50}{x^3}$ a f''_{xy}= 5 = f''_{yx} a tiež $f''_{yy} = \frac{16}{y^3}$

$f''_{xx}\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right)$ = $\frac{16}{5}$ $f''_{yy}\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right) = \frac{125}{4}$

Potom

$$M(A) = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & 5 \\ 5 & \frac{125}{4} \end{pmatrix}$$

Použijeme Sylvestra

$$d_1 = \frac{16}{5} > 0$$

$$d_2 = detM(A) = 75 > 0 \ .$$

V bode A má funkcia ostré lokálne minimum.

Hodnota lokálneho minima je f(A)=30.

Príklad 10.

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$

Najprv nájdime stacionárne body tejto funkcie.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ = $2xe^{-x^2-y^2}(-2y^2 - x^2 + 1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ = $2ye^{-x^2-y^2}(-2y^2 - x^2 + 2) = 0$

a.) $Ak \quad x = 0,\ y = 0$ bod A=(0,0) je stacionárny bod

b.) Ak $(-2y^2 - x^2 + 1)$=0

$(-2y^2 - x^2 + 2)$=0 /.(-1)

$-1 = 0$ Systém nemá riešenie

c.) $Ak \quad x = 0 \quad a \quad -2y^2 - x^2 + 2 = 0$ potom $y = \pm 1$

a máme 2 stacionárne body B=(0,1) a C=(0,-1)

d.) Ak $Ak \quad y = 0 \quad a \quad -2y^2 - x^2 + 1 = 0$ potom $x = \pm 1$

a máme ďalšie 2 stacionárne body D=(1,0) a E(-1,0)

f''_{xx}= $e^{-x^2-y^2}(8x^2y^2 + 4x^4 - 4y^4 - 10x^2 + 2)$

f''_{xy}= $e^{-x^2-y^2}(8xy^3 + 4x^3y - 12xy) = f''_{yx}$ a tiež

$f''_{yy} = e^{-x^2-y^2}(8y^4 + 4x^2y^2 - 20y^2 - 2x^2 + 4)$

Použijeme Sylvestrovo kritérium

a.) V bode A

$$M(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 2 > 0$$

$$d_2 = detM(A) = 8 > 0$$

v bode A má funkcia ostré lokálne minimum.

b.) V bode B=(0,1)

$$M(B) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{-8}{e} \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \frac{-2}{e} < 0$$

$$d_2 = \frac{16}{e^2} > 0$$

v bode B má funkcia ostré lokálne maximum

c.) V bode C=(0,-1)

$$M(C) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{-8}{e} \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \frac{-2}{e} < 0$$

$$d_2 = \frac{16}{e^2} > 0$$

v bode C má funkcia ostré lokálne maximum

d.) V bode D = (1,0) je a matica $M(D) = \begin{pmatrix} \frac{-4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$,

potom $d_2 = \frac{-8}{e^2} < 0$

V bode D funkcia nemá extrém, je tam sedlový bod.

e.) V bode E =(-1,0) je a matica $M(E) = \begin{pmatrix} \frac{-4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$,

potom $d_2 = \frac{-8}{e^2} < 0$

V bode E funkcia nemá extrém, je tam sedlový bod.

Nájdite stacionárne body a body lokálnych extrémov funkcie troch premenných.

Príklad 11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Nájdime stacionárne body tejto funkcie.

Použijeme vetu o nutnej podmienke. Riešme sústavu rovníc

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z = 0$

Máme jediný stacionárny bod A=(0,0,0)

Druhé parciálne derivácie f sú:

f''_{xx}= 2 , f''_{xy}= 0 = f''_{yx} , f''_{xz}= 0 = f''_{zx} $f''_{yy} = 2$, f''_{zy}= 0 = f''_{yz} a $f''_{zz} = 2$

Matica $M(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$d_1 = 2 > 0$, $d_2 = det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ a $d_3 = detM(A) = 8 > 0$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod A bodom ostrého lokálneho minima.

Príklad 15. $f(x,y,z) = xy + yz - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - y - z - 3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y - x = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z - y - 1 = 0$ a

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y - 1 = 0$.

Riešením je jediný stacionárny bod B=(1,1,1).

Druhé parciálne derivácie f sú:

f''_{xx}= - 1 , f''_{xy}= 1 = f''_{yx} , f''_{xz}= 0 = f''_{zx} $f''_{yy} = -1$, f''_{zy}= 1 = f''_{yz} a $f''_{zz} = 0$

Matica $M(B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$d_1 = 2 > 0$, $d_2 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

Čo teraz? Nič sa nedeje, v prednáške je drobná, ale užitočná poznámka!

A teda ju využijeme!

Ide o možnosť premenovania premenných, t.z. zoberieme iný subdeterminant, premenných yz,

$d_2 = det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0$ t.z. v bode B funkcia nemá extrém.

Príklad 19. $f(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$ $\quad pre\ \ x > 0,\ \ y > 0$ a $z > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4yz - 2xyz - y^2z - yz^2 = 0\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4xz - x^2z - 2xyz - xz^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4xy - x^2y - xy^2 - 2xyz = 0$$

Riešením je jediný stacionárny bod C=(1,1,1)

Matica $\quad M = \begin{pmatrix} -2yz & 4z - 2xz - 2yz - z^2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$M(C) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$d_1 = -2 < 0\ ,\quad d_2 = det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 3 > 0 \quad d_3 = detM(C) = -4 < 0$

A teda v bode C má funkcia ostré lokálne maximum.

Príklad 19 som riešila iba pre $x > 0,\ \ y > 0$ a $z > 0$

Ostatné príklady určite zvládnete, keď si pozorne prečítate prednášku, želám dobré zdravie a chuť na samoštúdium.

Sú tam určite chyby, veď sa poznáme, oceníme, ak ich nájdete a pošlete!!!!

E.P .