Milí naši študenti, predpokladám, že už ste si naštudovali prednášku č.5,

pustili ste sa do príkladov z cvičenia č.5. a vypočítali príklady 1. a 2.

Príklad 3. Dokážte, že funkcia $F(x,y) = \varphi(y.e^{-x})$, v ktorej φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, je riešenie rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Riešenie: Počítajme parciálne derivácie zloženej funkcie

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \varphi'(ye^{-x})ye^{-x}(-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(ye^{-x})e^{-x}$$

Potom po dosadení

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi'(ye^{-x})ye^{-x}(-1) + y\varphi'(ye^{-x})e^{-x} = 0$$

Príklad 4.

Vypočítajte (všetky štyri) druhé parciálne derivácie funkcie

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Riešenie: Najprv si pripravme $f_x' = 2x$ a $f_y' = 2y$.

Teraz f''_{xx}=2, f''_{xy}= 0 = f''_{yx} a tiež $f''_{yy} = 2$.

Zmiešané parciálne derivácie sú si rovné. (vždy ? Pozrite do prednášky!)

Príklady 5.-7. nič komplikované-nebudem riešiť.

Príklad 8. Vypočítajte (všetky štyri) druhé parciálne derivácie funkcie

$$f(x,y) = e^{2y}\,sinx.$$

Riešenie: Najprv si pripravíme

$$f_x' = e^{2y}cosx \text{ a } f_y' = 2\,sinx\,e^{2y}.$$

Teraz $f''_{x\,x}$= - $e^{2y}sinx,$ f''_{xy}= $2e^{2y}cosx$ = f''_{yx} a nakoniec

$f\,''_{yy} = 4\;sinx\;e^{2y}$

Príklad 9. Dokážte že funkcia

$$F(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

je riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

Riešenie: Pripravíme si derivácie

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x + y) + g'(x - y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f'(x + y) + g'(x - y)(-1).$$

A tiež

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(x + y) + g''(x - y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(x + y) + g''(x - y)(-1)^2.$$

Potom po dosadení naozaj platí

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(x + y) + g''(x - y) - f''(x + y) - g''(x - y) = 0.$$

Príklad 11. Vypočítajte druhý diferenciál $d^2(a,h,k)$ a Taylorov polynóm 2. stupňa funkcie

$$f(x,y)=x^3+y^3, \qquad \text{v bode} \qquad a = [2,-1].$$

Riešenie: Pripravíme si

$f'_x = 3x^2$ a $f'_y = 3y^2$,

$f''_{xx} = 6x$ $\quad f''_{xy} = 0$ $\quad f''_{yx} = 0$ $\quad f''_{yy} = 6y$

Ich hodnoty v bode a sú $f'_x(a) = 12$, $\quad f'_y(a) = 3$,

$f''_{xx}(a) = 12$, $\quad f''_{xy}(a) = 0$ a $\quad f''_{yy}(a) = -6$.

Potom $d^2f(a,h,k) = 12h^2 - 6k^2$

Na vytvorenie Taylorovho polynómu potrebujeme aj $d^1(a,h,k)$

$$d^1f(a,h,k) = 12h + 3k$$

a hodnotu $f(a) = 7$.

A teda $T^2f(a,h,k) = 7 + 12h + 3k + 6h^2 - 3k^2$

Príklad 12. Vypočítajte druhý diferenciál $d^2(a,h,k)$ a Taylorov polynóm 2. stupňa funkcie $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, v bode *a = [0,0].*

Riešenie: Pripravíme si

$f'_x = 2x - y$ a $f'_y = -x + 2y$, $\quad f'_x(a) = 0$ a $\quad f'_y(a) = 0$.

$f''_{xx} = 2$, $\quad f''_{xy} = -1$, $\quad f''_{yx} = -1$, $\quad f''_{yy} = 2$.

Potom $d^1f(a,h,k) = 0$ a $d^2f(a,h,k) = 2h^2 - 2hk + 2k^2$

A teda $T^2f(a,h,k) = 0 + 0 + h^2 - hk + k^2$.

Ak nahradíme $h = x - 0$, $k = y - 0$, dostaneme

$T^2 f(a,x,y)$ = $x^2 - xy + y^2$.

Funkcia sa zhoduje so svojim Taylorovým polynómom 2. stupňa. (Prečo?)

Príklad 13. To isté iba v bode a = [1,2].

Riešenie:

$f'_x = 2x - y$ a $f'_y = -x + 2y$ $f'_x(a) = 0$ a $f'_y(a) = 3$

Potom $d^1 f(a,h,k) = 3k$ a $d^2 f(a,h,k) = 2\,h^2$ -2hk +2 k^2

A teda $T^2 f(a,h,k)$ = 3 + 3k+ h^2 - hk + k^2

Skúste dosadiť $h = x - 1$, $k = y - 2$!

Čím sa líšia výsledky príkladu 12 a 13?