Cvičenie 5.

Reťazové pravidlo, druhé parciálne derivácie.

Ak funkcia $h(u,v)$, $h : R^2 \to R$ je diferencovateľná a
funkcie $f(x,y),\ g(x,y) : A \subset R^2 \to R$ sú tiež diferencovateľné, tak zložená funkcia $F(x,y) = h(f(x,y), g(x,y))$ má

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h(f(x,y),g(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}(f(x,y),g(x,y))\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial h}{\partial v}(f(x,y),g(x,y))\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

Vyššie uvedená formulka sa zvykne nazývať reťazové pravidlo.

Prehľadnejší je zápis reťazového pravidla bez argumentov funkcií.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$$

1. Vypočítajte $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ ak $h(u,v) = \ln u^2 + v,\ f(x,y) = xy^2,\ g(x,y) = x^2 + y$.

2. Dokážte že každá funkcia $F(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$, v ktorej φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, je riešenie rovnice

$$x\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

3. Dokážte že funkcia $F(x,y) = \varphi(ye^{-x})$, v ktorej φ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, je riešenie rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Nech funkcia $F(x,y)$, $A \subset F : R^2 \to R$ je diferencovateľná na svojom definičnom obore A.

Označme

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Ak má funkcia g parciálne derivácie, tak funkciu $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ nazývame druhá parciálna derivácia f podľa premennej x a značíme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2},$$

alebo tiež

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = f"_{xx}.$$

Analogicky definujeme druhé parciálne derivácie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f"_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f"_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = f"_{yy},$$

Vypočítajte (všetky štyri) druhé parciálne derivácie funkcie f ak

4. $f(x,y) = x^2 + y^2$
5. $f(x,y) = x^2 - y^2$
6. $f(x,y) = xy$
7. $f(x,y) = \frac{1}{2}(2x^2 + 3xy + 5y^2)$
8. $f(x,y) = e^{2y} \sin x$
9. Dokážte že funkcia $F(x,y) = f(x-y) + g(x+y)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

10. Dokážte že funkcia $F(x,y) = xf(\frac{x}{y}) + yg(\frac{y}{x})$ je riešenie rovnice

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Vypočítajte druhý diferenciál $d^2 f(a,h,k)$ a Taylorov polynóm 2. stupňa funkcie f, ak

11. $f(x,y) = x^3 + y^3, \qquad a = [2,-1].$
12. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \qquad a = [0,0].$
13. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \qquad a = [1,2].$

Čím sa líšia výsledky príkladu 12 a 13? (Skúste upraviť $T^2(f)$.)

14. $f(x,y) = e^{2xy} \sin x, \qquad a = \left[\frac{\pi}{2}, 1\right].$

Výsledky

1. $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{2}{u} \cdot y^2 + 2x = \dfrac{2}{x} + 2x, \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{2}{u} \cdot 2xy + 1 = \dfrac{4}{y} + 1.$
2. pozri prednášku