Cvičenie 4.

Derivácia v smere a gradient.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$, nech $[x_0, y_0] \in A$ a nech $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.
Číslo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$$

nazývame derivácia funkcie f v smere $\vec{e}$ v bode $[x_0, y_0]$.

Špeciálne pre smer daný uhlom $\alpha = 0$ dostaneme parciálnu deriváciu podľa premennej x a pre $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dostaneme parciálnu deriváciu podľa premennej y.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$, má spojité parciálne derivácie v okolí bodu $[x_0, y_0] \in A$.
Vektor

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

nazývame gradient funkcie f v bode $[x_0, y_0]$.

Veta. *Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$, má spojité parciálne derivácie v okolí bodu $[x_0, y_0] \in A$ a nech $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.*
Potom

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}.$$

V nasledujúcich príkladoch vypočítajte 1.diferenciál a gradient funkcie f v bode a. Vypočítajte aj deriváciu funkcie f v smere vektora $\vec{u}$ v bode a.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy, \quad a = (1, 2), \quad \vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
2. $f(x, y, z) = x^2yz, \quad a = (1, 2, -1), \quad \vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.
3. $f(x, y, z) = \frac{y}{z}^x, \quad a = (1, 4, 2), \quad \vec{u} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
4. $f(x, y) = x^2 y \ln(x + y), \quad a = (-1, 2), \quad \vec{u} = (\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3})$.
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad a = (1, 2), \quad \vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Použitím definície vypočítajte deriváciu funkcie f v smere vektora $\vec{u}$ v bode a.
6. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \qquad a = (0, 0) \qquad \vec{u} = (1, 1)$.

7. Napíšte deriváciu funkcie $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, v smere určenom priamkou $x = 2 + t, y = 1 - 2t, z = 3 - 1t$ v bode $a = (2, 1, 3)$.

8. Napíšte deriváciu funkcie $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, v smere určenom priamkou $x - 2 = y - 1$ v bode $a = (2, 1)$. Napíšte rovnicu dotyčnice v bode a v určenom smere.

9*. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $x = y = z$.

Z vyššie uvedenej Vety vyplýva, že funkcia so spojitými parciálnymi deriváciami má v danom bode maximálny rast v smere gradientu, minimálny rast v opačnom smere (smere $-\operatorname{grad} f$) a nulový rast v smere kolmom na gradient.

Vypočítajte, v ktorom smere má funkcia $f(x,y)$ maximálny, minimálny a v ktorom nulový rast.

10. $f(x,y) = e^{(x^2-y^2)}$ v bode $a = [2,1]$.
11. $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$ v bode $a = [2,1]$.

Vypočítajte, v ktorom bode má funkcia $f(x,y)$ nulový rast v každom smere.

12. $f(x,y) = e^{(x^2+xy-y^2-x)}$

Výsledky

1. $df(a,x,y) = 4(x-1) + 5(y-2),\ \operatorname{grad} f(a) = (4,5),\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$
2. $df(a,x,y,z) = -4(x-1) - 1(y-2) + 2(z+1),\ \operatorname{grad} f(a) = (-4,-1,2),\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = -\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$
3. $df(a,x,y,z) = \ln 16(x-1) + \frac{1}{2}(y-4) - 1(z-2), \quad \operatorname{grad} f(a) = (\ln 16, \dfrac{1}{2}, -1),$ $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \dfrac{\ln 16 - 1}{3}$
4. $df(a,x,y) = 2(x+1) + 2(y-2),\ \operatorname{grad} f(a) = (2,2),\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{3}$
5. $df(a,x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-1) + \dfrac{2}{\sqrt{6}}(y-2),\ \operatorname{grad} f(a) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \dfrac{11}{5\sqrt{6}}$