Cvičenie 2.

Limita a spojitosť.

Pripomeňme, že: $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^n \to R$, a nech $\overline{x}_0$ je hromadný bod množiny A. Hovoríme, že funkcia f má v bode $\overline{x}_0$ limitu $L \in R^*$, ak:
$\forall\, O_\varepsilon(L)\ \exists\, O_\delta^\circ(\overline{x}_0)$, také, že $\overline{x} \in O_\delta^\circ(\overline{x}_0) \ \Rightarrow\ f(\overline{x}) \in O_\varepsilon(L)$. Značíme:

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = L.$$

Veta. *Nech* $f : A \subseteq R^n \to R$, $g : A \subseteq R^n \to R$ *a nech existujú vlastné limity* $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = L_1$, $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = L_2$.
Potom

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) + g(\overline{x}) = L_1 + L_2,$$
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) = L_1 \cdot L_2,$$
ak naviac $L_2 \neq 0$, *tak* $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \dfrac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Vypočítajte limitu funkcie

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 2x + 3y.$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} \dfrac{(2x+y)^2-9}{4xy+2y^2+6y}.$

Veta. *Nech* $A \subseteq R^n$ *a nech* $f : A \to R$, $g : A \to R$, $h : A \to R$, *pričom*
$f(\overline{x}) \le g(\overline{x}) \le h(\overline{x})$.
Nech existujú limity $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} h(\overline{x}) = L$.
Potom aj $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = L$.

Vypočítajte limity

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \dfrac{1}{y}.$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{xy}.$

5.1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x}.$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}.$

6.1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$

Veta. *Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$. Nech existuje limita $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = L$.*

Nech $\varphi(t) : [0, T] \to R^n$ je spojitá funkcia a $\varphi(0) = \overline{x}_0$.

Potom aj limita funkcie jednej premennej

$$\lim_{t \to 0} f(\varphi(t)) = L.$$

Dôsledok. *Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$.*

Ak $\varphi_1(t), \varphi_2(t) : [0, T] \to R^n$ sú spojité funkcie, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \overline{x}_0$ a

$$\lim_{t \to 0} f(\varphi_1(t)) \neq \lim_{t \to 0} f(\varphi_2(t)),$$

tak

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) \text{ neexistuje.}$$

Zistite, či existuje limita

7. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.
8. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x + y}{x - y}$.
9. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x}{y}$.
10. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.
11. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$.
12. $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^{\frac{3}{2}} y}{x^2 + y^2}$.

Definícia. Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$, a nech $\overline{x}_0 \in A$. Hovoríme, že funkcia f je v bode $\overline{x}_0$ spojitá, ak

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0).$$

Zistite, či je v bode $[0, 0]$ spojitá funkcia

13. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{4} & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
14. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
15. $f(x, y) = \begin{cases} \cos \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
16. Dodefinujte funkciu f tak, aby bola spojitá v každom bode

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y} & (x, y) \neq (x, 0) \\ ? & (x, y) = (x, 0). \end{cases}$$

Výsledky

1. 11   2. 2   3. -3 4. 0   5. 1   5.1 0   6. 0   6.1 0
7. až 11. limita neexistuje   12. 0   13. je spojitá   14. nie je spojitá
15. je spojitá   16. x