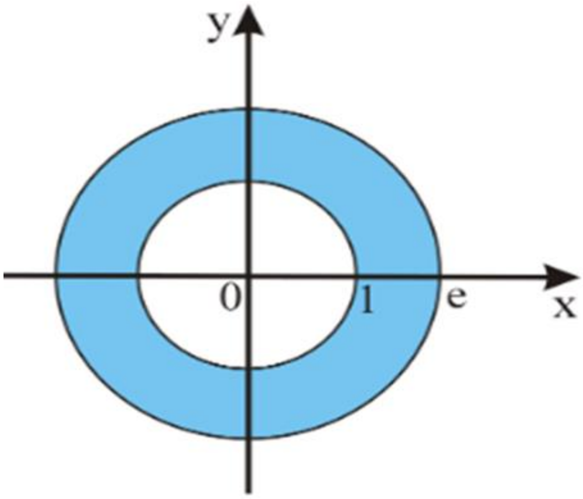
Milí naši študenti, predpokladám, že si zamoodlili a získali body za výpočet pomerne jednoduchého integrálu na obdĺžniku, prepočítali príklady na výpočet integrálov bez substitúcie a „zarobili“ body z testu a pustili sa s chuťou do riešenia integrálov s použitím substitúcie.

Použitím transformácie do polárnych súradníc vypočítajte dvojný integrál:

Príklad 2.

$\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$, ak M=$\{(x,y); 1 \le x^2+y^2 \le e\}$

Riešenie.



Vidíte, že M je medzikružie, popíšme ho ako elementárnu oblasť použitím polárnych súradníc

$x = r\cos\varphi$,

$y = r\sin\varphi$.

Je zrejmé, že dosadením týchto súradníc do $1 \le x^2+y^2 \le e$ dostaneme

$$1 \le r^2 \le e$$

a teda

$$1 \le r \le \sqrt{e}$$

a z obrázku je zrejmé, že $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

(modro vyfarbené body množiny M zasiahneme z počiatku [0,0] pod ľubovoľným uhlom)

Preto $\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \int_1^{\sqrt{e}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{ln\,r^2}{r^2}.rd\varphi\right)dr$=$\int_1^{\sqrt{e}}\ \frac{ln\,r^2}{r}$. $[\varphi]_0^{2\pi}dr$=

$2\pi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{lnr^2}{r}dr = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{2lnr}{r}dr = 2\pi[ln^2r]_1^{\sqrt{e}} = 2\pi\left[ln^2\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - ln^2 1\right]$= $\frac{\pi}{2}$.

Príklad 5

$\iint_M x^2ydxdy$, ak M=$\{(x,y); x^2+y^2 \leq 2x,\ \ y \geq 0\}$

Riešenie.

Oblasť M identifikujeme tak, že $x^2+y^2 \leq 2x$ upravíme doplnením na úplný štvorec $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Touto nerovnosťou je určený kruh so stredom v bode S=(1,0) s polomerom r=1. Spolu s podmienkou $y \geq 0$ dostávame polkruh.

Ohraničenie pre r získame dosadením polárnych súradníc do nerovnosti kruhu,

Čiže $$r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi \leq 2rcos\varphi$$

$$r^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) \leq 2rcos\varphi$$

$$r \leq 2cos\varphi$$

Teda $$0 \leq\ r \leq 2cos\varphi$$

a z obrázku je zrejmé, že $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Preto $\iint_M x^2ydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2cos\varphi} r^2.cos^2\varphi.rsin\varphi.rdr\right)d\varphi =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2cos\varphi} r^4.cos^2\varphi.sin\varphi\,dr\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\varphi.sin\varphi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2cos\varphi}\ d\varphi =$$

$$\frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^7\varphi . sin\varphi\, d\varphi =$$

Použijeme substitúciu $cos\varphi = t, \quad - sin\varphi\, d\varphi = dt$

$$\frac{32}{5}\int_0^1 t^7 dt = \frac{4}{5}$$

Určite vás napadlo, že sme mohli postupovať aj inak, a to tak, že použijeme

transformáciu $x = 1 + r\cos\varphi \quad a \quad y = r\sin\varphi$, čím sa „posúvame" sa do stredu kruhu a keď ju dosadíme do podmienky $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ dostaneme

$0 \leq r \leq 1$ a zrejme aj $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Riešenie sa zmení, otázka je či sme si ho zjednodušili, alebo skomplikovali?

Vyskúšajte!

Príklad 7

$$\iint_M x^2 y dx dy,$$

ak M=$\{(x,y); x^2 + (y-1)^2 \geq 1,\ x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.

Čiže integrálna funkcia je taká istá, ale oblasť úplne iná, nakreslite si ju!

Riešenie.

Na určenie hraníc som použila „klasickú" substitúciu

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$

ktorú som dosadila do $x^2 + (y-1)^2 \geq 1$ a po úprave mi vyšla 1.podmienka $r \geq 2sin\varphi$, a do $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$ a po úprave mi vyšla 2.podmienka $r \leq 4sin\varphi$.

Takže $2sin\varphi \leq r \leq 4sin\varphi$ a z obrázku je zrejmé, že $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Preto $\iint_M x^2 y dx dy = \int_0^{\pi}\left(\int_{2sin\varphi}^{4sin\varphi} r^2 . cos^2\varphi . rsin\varphi . rdr\right) d\varphi =$

$$\int_0^{\pi}\left(\int_{2sin\varphi}^{4sin\varphi} r^4 . cos^2\varphi . sin\varphi\, dr\right) d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} cos^2\varphi . sin\varphi \left[\frac{r^5}{5}\right]_{2sin\varphi}^{4sin\varphi} d\varphi = \frac{992}{5}\int_0^{\pi}(sin^5\varphi . sin\varphi . cos^2\varphi)d\varphi =$$

$\frac{992}{5}\int_0^{\pi}(sin^6\varphi - sin^8\varphi)d\varphi =$ (rozdelila som si to na 2 integrály)

$$I_1 = \int_0^{\pi} sin^6\varphi d\varphi = \int_0^{\pi}\left[\frac{1-cos2\varphi}{2}\right]^3 d\varphi = \frac{5}{16}\pi$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} sin^8\varphi d\varphi = \int_0^{\pi}\left[\frac{1-cos2\varphi}{2}\right]^4 d\varphi = \frac{35}{128}\pi$$

Potom $\iint_M x^2 y dx dy = \frac{992}{5}\int_0^{\pi}(sin^6\varphi - sin^8\varphi)d\varphi =$ 7,75π

Aj vy máte pocit, že som nezvolila práve najlepšie riešenie? A vôbec, nie som si istá, či tam nie je chyba, dosť som sa s tým natrápila.

Ak máte lepšie riešenie, a bude naozaj lepšie, pošlite mi ho za bod!

Iste ste si všimli, že na obrázku el. oblasti je nesprávny polomer e a má byť $\sqrt{e}$.

To bola len kontrola pozornosti! Držím palce na teste a čakám vaše inteligentné riešenia! E.P.