Cvičenie 1.

Priestor R^2, R^3.

Vypočítajte $d(A,B)$ vzdialenosť bodov A, B v rovine R^2.
1. $A = (2,1),\ B = (1,3)$.
2. $A = (-2,3),\ B = (1,-4)$.

Vypočítajte $d(A,B)$ vzdialenosť bodov A, B v priestore R^3.
3. $A = (1,-2,3),\ B = (2,1,-4)$.
4. $A = (2,1,-2,),\ B = (1,-4,1)$.

Nakreslite vektor $\vec{OA}$ a vypočítajte jeho dĺžku ak O je začiatok súradnej sústavy a
5. $A = (2,1)$
6. $A = (2,1,-2)$

Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodmi A, B.
7. $A = (3,1),\ B = (1,-1)$.
8. $A = (2,0),\ B = (0,2)$.
9. $A = (2,-1,1),\ B = (1,2,-3)$.

Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi A, B, C.
10. $A = (2,-1,1),\ B = (1,2,-3),\ C = (0,1,-1)$.

Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A, a je kolmá na vektor $\vec{n}$.
11. $A = (1,-2,1)$, $\vec{n} = (1,1,-2)$.

Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$.
12. $\vec{u} = (2,-1),\ \vec{v} = (2,3)$.
13. $\vec{u} = (2,-1),\ \vec{v} = (1,2)$.
14. $\vec{u} = (2,-1,4),\ \vec{v} = (4,2,3)$.
15. $\vec{u} = (2,-1,4),\ \vec{v} = (-5,2,3)$.

Je daný vektor $\vec{u}$, nájdite k nemu kolmý vektor $\vec{v}$.
16. $\vec{u} = (1,2)$.
17. $\vec{u} = (2,1,2)$.

Je daný vektor $\vec{u}$, nájdite k nemu dva kolmé vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ tak aby žiaden z nich nebol násobkom druhého.
18. $\vec{u} = (2,1,2)$.

Sú dané vektory $\vec{u}$,$\vec{v}$ nájdite vektor $\vec{w}$, kolmý k obom.
19. $\vec{u} = (2,-1,1),\ \vec{v} = (-1,2,-3)$.

Funkcia viacerých premenných.

Definícia. Zobrazenie f, ktoré každému $\bar{x} \in A \subset R^n$ priradí jediné $y \in R$, nazývame funkcia n premenných. Značíme $f : A \to R$.

Množinu A nazývame definičný obor. Značíme D_f.

Množinu $H_f = \{y \in R;\ \text{takých, že } \exists\, \bar{x} \in D_f,\ y = f(\bar{x})\}$ nazývame obor hodnôt.

Množinu $G_f = \{[\bar{x}, y] \in R^{n+1};\ \bar{x} \in D_f,\ y = f(\bar{x})\}$ nazývame graf funkcie f.

Popíšte a nakreslite množinu D_f, definičný obor funkcie f, ak

20. $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$.
21. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.
22. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.
23. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$.
24. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.
25. $f(x,y) = \ln xy$.
26. $f(x,y) = \ln\left(x \ln(y-x)\right)$.

V R^3 nakreslite graf funkcie f, ak

27. $f(x,y) = 3x + 4y - 1$

Nakreslite vrstevnicu grafu funkcie f pre $z = 0$ a pre $z = 1$. Nakreslite rez grafu funkcie f rovinou $x = 1$, a tiež rovinou $x = 0$. Nájdite obor hodnôt H_f.

28. $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2$.

Nakreslite vrstevnicu grafu funkcie f pre $z = 1$. Nakreslite rez grafu funkcie f rovinou $x = 1$, a tiež rovinou $x = 0$. Nakreslite obor hodnôt H_f. Nájdite minimum oboru hodnôt.

29. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$.

Nakreslite vrstevnice grafu funkcie f pre $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$. Nakreslite rez grafu funkcie f rovinou $x = 1$, a tiež rovinou $x = 0$. Nakreslite obor hodnôt. Nájdite infimum oboru hodnôt.

30. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Nakreslite vrstevnice grafu funkcie f pre $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$. Nakreslite rez grafu funkcie f rovinou $y = 0$, a tiež $x = 0$. Nájdite obor hodnôt.

31. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Určte definičný obor. Nakreslite vrstevnice grafu f pre vhodné hodnoty z. Nakreslite rez grafu funkcie f rovinou $y = 0$, resp. $x = 0$. Nakreslite obor hodnôt. Nájdite maximum a minimum oboru hodnôt.

32. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

Určte definičný obor.

Pozn.: Sledujte na grafe správanie sa funkcie v okolí bodu $(0,0)$.

Nakreslite vrstevnice. Nakreslite rezy $x = 0$, $x = 1$. Nájdite obor hodnôt.

Výsledky.

1. $\sqrt{5}$ 2. $\sqrt{58}$ 3. $\sqrt{59}$ 4. $\sqrt{35}$ 5. $\sqrt{5}$ 6. 3
7. $x = 3 - 2t \quad y = 1 - 2t$ 8. $x = 2 - 2t \quad y = 2t$
9. $x = 2 - t \quad y = -1 + 3t \quad z = 1 - 4t$
10. $x = 2 - t - 2s \quad y = -1 + 3t + 2s \quad z = 1 - 4t - 2s$ (riešenie môže byť aj v inom tvare.)
11. $x - 1 + y + 2 - 2(z - 1) = 0$
12. 1 13. 0 14. 18 15. 0
16. $\vec{v} = (-2, 1)$ (riešení je nekonečne veľa, každé iné je násobkom $\vec{v}$.)
17. $\vec{v} = (1, 2, -2)$ (riešení je nekonečne veľa, viď príklad 18.)
18. $\vec{v} = (-1, 2, 0)$, $\vec{w} = (1, 2, -2)$ (riešení je nekonečne veľa, každé iné je lineárnou kombináciou $\vec{v}$, $\vec{w}$.)
19. $\vec{w} = (1, 5, 3)$ (riešení je nekonečne veľa, každé iné je násobkom $\vec{w}$.)

Obrázky v príkladoch 20 až 32 si môžete skontrolovať pomocou vhodného softvéru.

20. $D_f = R^2 \setminus \{[x, y];\ x = 0 \ \vee \ y = 0\}$
21. $D_f = R^2 \setminus \{[x, y];\ x = y \ \vee \ x = -y\}$
22. $D_f = \{[x, y];\ x \geq -y\}$
23. $D_f = \{[x, y];\ -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ |y| \geq 1\}$
25. $D_f = \{[x, y];\ xy > 0\}$
27. $H_f = R$
28. $H_f = [-2, \infty]$
29. $H_f = (0, \infty]$
30. $D_f = R^2$, $H_f = R$
31. $D_f = \{[x, y];\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H_f = [0, 1]$
32. $D_f = R^2 \setminus \{[x, y];\ y = 0\}$, $H_f = R$