Prednáška 9.

Matematici sú ako Francúzi. Čokoľvek im poviete, preložia si do vlastného jazyka, a v tom okamihu to znamená niečo úplne iné.

Johann Wolfgang von Goethe 1749 - 1832

Dvojný integrál na merateľnej množine.

Definícia integrálu na množine.

V predchádzajúcej kapitole sme sa naučili, ako merať veľkosť množiny v rovine R^2. Uviedli sme dôležitý príklad merateľných množín, a síce elementárne oblasti.

Ale dvojný integrál sme zaviedli zatiaľ len na obdĺžniku.

Úlohou tejto kapitoly je ukázať, ako vieme pojem dvojný integrál preniesť na ľubovoľnú merateľnú množinu.

Urobíme to tak, že definičný obor funkcie f zväčšíme na obdĺžnik.

Definícia. Majme funkciu $f : A \to R$ definovanú na merateľnej množine A.

Nech I_2 je taký dvojrozmerný interval, že $A \subset I_2$.

Funkciu

$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{ak } (x,y) \in A \\ 0 & \text{ak } (x,y) \notin A \end{cases}$$

nazývame **rozšírenie funkcie** f na obdĺžnik I_2.

Čiže funkciu f sme na jej definičnom obore A nezmenili a f_A sme vytvorili tak, že sme doplnili funkčné hodnoty v obdĺžniku I_2, ale mimo množiny A, nulou.

Definícia. Funkciu $f : A \to R$ definovanú na merateľnej množine A, nazývame **integrovateľná** na množine A, ak jej rozšírenie f_A na obdĺžnik I_2 je integrovateľná funkcia na I_2.

Číslo

$$\iint_{I_2} f_A(x,y)\,dxdy$$

nazývame **dvojný integrál** funkcie f na množine A a značíme

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_{I_2} f_A(x,y)\,dxdy.$$

Dá sa ľahko nahliadnuť, že hodnota dvojného integrálu funkcie f nezávisí od toho, do ktorého obdĺžnika množinu A vložíme (inak by definícia vyššie nemala zmysel), pretože tie body obdĺžnika I_2, ktorá ležia mimo množiny A, prispievajú k hodnote integrálu nulou.

Na záver tejto časti uvedieme vetu, ktorá hovorí, že podobne ako pri obdĺžnikoch, aj teraz je každá „rozumná" funkcia integrovateľná.

Veta. *Každá ohraničená funkcia dvoch premenných $f : A \to R$ definovaná na merateľnej množine A, ktorej množina bodov nespojitosti má mieru 0, je integrovateľná na A.*

Inými slovami, ak vieme zmerať veľkosť definičného oboru A a „strecha" $f(x,y)$ nie je príliš „potrhaná", tak vieme zmerať aj objem pod strechou.

Fubiniho veta na elementárnej oblasti.

Ako v prípade obdĺžnika, tak aj teraz by sa integrál na množine A počítal z definície len veľmi ťažko.

Pomôžeme si vetou, ktorá umožní výpočet dvojného integrálu na elementárnej oblasti pomocou dvoch určitých integrálov funkcií jednej premennej.

Veta (Fubini na elementárnej oblasti typu xy). *Nech*

$$M = M_{xy} = \{[x,y] \in R^2; \quad a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

je elementárna oblasť typu xy a nech $f : M \to R$ *je integrovateľná funkcia. Nech pre každé* $x \in [a,b]$ *existuje integrál*

$$K(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Potom

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = \int_a^b K(x)\,dx = \int_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Pri pohľade na Fubiniho vetu zostaneme pri predstave krájania funkcie f na plátky v smere osi y, len si všimnime, že teraz naše rezy nezačínajú a nekončia na tom istom mieste ($K(x)$ *sme pri obdĺžniku dostali ako integrál od c po d nezávisle od hodnoty* x), ale dĺžka každého rezu sa mení a závisí od miesta x.

Analogická veta o výpočte integrálu platí aj pre elementárnu oblasť typu yx.

Veta (Fubini na elementárnej oblasti typu yx). *Nech*

$$M = M_{yx} = \{[x,y] \in R^2; \quad c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

je elementárna oblasť typu yx a nech $f : M \to R$ *je integrovateľná funkcia. Nech pre každé* $y \in [c,d]$ *existuje integrál*

$$K(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

Potom

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = \int_c^d K(y)\,dy = \int_c^d \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Použitie Fubiniho vety predvedieme v nasledujúcich príkladoch.

Príklad 1. Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint_M xy\,dxdy$$

, ak množina M je ohraničená krivkami $y = 2x - x^2$ a $x + y = 0$.

Riešenie. V prvom kroku popíšeme množinu M ako elementárnu oblasť niektorého typu. (*Nakreslite.*)

Dosaďme z prvej rovnice oblasti M do druhej. Dostaneme

$$3x - x^2 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$. Teda $0 \le x \le 3$.

Pre $x \in [0, 3]$ je $3x - x^2 > 0$ a po odčítaní x dostaneme

$$2x - x^2 > -x.$$

Nerovnosti

$$\begin{gathered} 0 \le x \le 3 \\ -x \le y \le 2x - x^2 \end{gathered}$$

popisujú M ako elementárnu oblasť typu xy. (*Nájdite si príslušné čiary v obrázku.*)

Pretože hranice pre premennú y nie sú konštantné, musíme pri výpočte integrálu začať integrálom

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_{-x}^{2x-x^2} xy\,dy = \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{2x-x^2} = \\ &= x\frac{(2x-x^2)^2}{2} - x\frac{(-x)^2}{2} = \frac{4x^3 - 4x^4 + x^5}{2} - \frac{x^3}{2} = \frac{3x^3}{2} - 2x^4 + \frac{x^5}{2}. \end{aligned}$$

Teraz

$$\begin{aligned} \iint_M xy\,dxdy &= \int_0^3 \frac{3x^3}{2} - 2x^4 + \frac{x^5}{2}\,dx = \\ &= \left[\frac{3x^4}{8} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{12}\right]_0^3 = \frac{3^5}{8} - \frac{2\cdot 3^5}{5} + \frac{3^6}{12} = -\frac{243}{40}. \end{aligned}$$

Premyslite si, že záporný výsledok nie je chyba. Pozrite na obrázok oblasti a všimnite si, na ktorej časti oblasti M je funkcia f kladná, a na ktorej záporná.

Príklad 2. Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint_M x - y \, dxdy,$$

ak množina M je ohraničená priamkami $y = 0$, $y = x$ a $x + y = 2$.

Riešenie. V prvom kroku popíšeme množinu M ako elementárnu oblasť niektorého typu. (*Nakreslite.*)

Ak sme dobre kreslili, množina M je trojuholník s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$ a $C = [1, 1]$.

Ak by sme chceli popísať M ako elementárnu oblasť typu xy, dalo by sa to, ale horné ohraničenie oblasti by bola lomená čiara ACB.

Preto je výhodnejšie popísať M ako elementárnu oblasť typu yx.

(*My, ktorí máme slabšiu priestorovú predstavivosť, si prekreslíme obrázok tak, aby os y bola vodorovná a os x zvislá.*)

Najmenšia možná y-ová súradnica bodu v trojuholníku je nula, najväčšia je 1. Preto

$$0 \leq y \leq 1.$$

Trochu presnejšie by bolo povedať, že sme trojuholník ABC premietli na os y. Jeho priemet je úsečka $[0, 1]$ na tejto osi.

Ak si predstavíme (alebo aj nakreslíme) vodorovné šrafovanie trojuholníka ABC, tak každá šrafa, t.j. úsečka pre pevne zvolené y, začína na strane AC a končí na strane BC trojuholníka. Strana AC leží na priamke $y = x$ (alebo radšej $x = y$) a strana BC na priamke $x + y = 2$. Teda nerovnosti

$$\begin{aligned} &0 \leq y \leq 1 \\ &y \leq x \leq 2 - y \end{aligned}$$

popisujú M ako elementárnu oblasť typu yx.

Teraz musíme začať integrálom podľa premennej x

$$\begin{aligned} K(y) &= \int_y^{2-y} x - y \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_y^{2-y} = \\ &= \frac{(2-y)^2}{2} - (2-y)y - \frac{y^2}{2} + y^2 = 2 - 4y + 2y^2. \end{aligned}$$

A teda

$$\begin{aligned} \iint_M x - y \, dxdy &= \int_0^1 2 - 4y + 2y^2 \, dy = \\ &= \left[2y - 2y^2 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Príklad 3. Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M e^{\frac{x}{y}}\,dxdy,$$

ak množina M je ohraničená krivkami $y = 1$, $x = 0$ a $y^2 = x$.

Riešenie. V prvom kroku popíšeme množinu M ako elementárnu oblasť niektorého typu. (*Nakreslite, tretia čiara je parabola.*)

Ak sme dobre kreslili, množina M je ohraničená úsečkami AC a BC a časťou paraboly AB. Pritom $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$ a $C = [0, 1]$.

Elementárnu oblasť M popíšeme ako oblasť typu yx.

Zrejme y-ové súradnice bodov v oblasti M sa menia v rozsahu od nula po 1. Preto

$$0 \le y \le 1.$$

(*Znovu sme premietli oblasť M na os y. Priemetom je úsečka* $[0, 1]$.)

Pretože $0 \le y^2$, máme nasledujúci popis M ako elementárnej oblasti typu yx

$$\begin{aligned} 0 \le y &\le 1, \\ 0 \le x &\le y^2. \end{aligned}$$

Začneme integrálom podľa premennej x

$$K(y) = \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx = \left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2} = ye^y - y.$$

Teraz

$$\begin{aligned} \iint\limits_M e^{\frac{x}{y}}\,dxdy &= \int_0^1 ye^y - y\,dy = \\ &= [ye^y]_0^1 - \int_0^1 e^y\,dy - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = e - e + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(*Sčítanec ye^y sme integrovali metódou per partes.*)

Mohla by nám napadnúť dotieravá otázka, prečo sme zvolili popis oblasti M typu yx a nie xy. Veď M vieme popísať pomocou nerovností

$$\begin{aligned} 0 \le x &\le 1, \\ \sqrt{x} \le y &\le 1. \end{aligned}$$

Spomeňme si na varovnú poznámku na konci minulej prednášky. Ak by sme teraz chceli vypočítať $K(x) = \int\limits_{\sqrt{x}}^{1} e^{\frac{x}{y}}\,dy$, tak sa dostaneme do problémov, lebo primitívnu funkciu nevieme zapísať pomocou elementárnych funkcií.

(Poznamenajme, že tento príklad má ešte jeden skrytý drobný háčik, ak naň prídete, napíšte mi.)

Vlastnosti integrovateľných funkcií.

Dvojný integrál má vlastnosti podobné, aké sme pozorovali v predchádzajúcom semestri pri určitom integráli.

Prvá vlastnosť hovorí, že dvojný integrál sa dá počítať po sčítancoch.

Veta (o linearite). *Nech $f: A \to R$, $g: A \to R$ sú integrovateľné funkcie na (merateľnej) množine A. Nech c_1, c_2 sú konštanty.*

Potom aj funkcia $(c_1\ f + c_2\ g)$ je integrovateľná na A a platí

$$\iint\limits_A c_1\, f(x,y) + c_2\, g(x,y)\, dxdy = c_1 \iint\limits_A f(x,y)\, dxdy + c_2 \iint\limits_A g(x,y)\, dxdy.$$

Niekedy sa stane, že merateľná množina A síce nie je elementárnou oblasťou, ale dá sa zapísať ako zjednotenie dvoch alebo viacerých elementárnych oblastí.

Vtedy vieme na výpočet dvojného integrálu použiť vetu o aditivite.

Veta (o aditivite). *Nech $f: A \to R$ je integrovateľná funkcia na merateľnej množine A. Nech $A = B \cup C$ pričom B a C sú tiež merateľné množiny a ich prienik má mieru 0.*

Potom funkcia f je integrovateľná aj na množinách B, C a platí

$$\iint\limits_A f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_B f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_C f(x,y)\, dxdy.$$

Nasledujúca veta hovorí, že ak výška miestnosti je konštantná a rovná 1, tak objem miestnosti je číselne zhodný s plochou podlahy.

Veta (o miere). *Nech $A \subset R^2$ je merateľná množina.*

Potom

$$m(A) = \iint\limits_A 1\, dxdy.$$

Všimnime si, že ak množina A je elementárna oblasť typu xy,

$$A = \{[x,y] \in R^2;\ \ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

tak podľa vety o miere je

$$m(A) = \iint\limits_A 1\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\, dy \right) dx = \int_a^b \psi(x) - \varphi(x)\, dx,$$

čo je vzorec dobre známy z predchádzajúceho semestra.

Príklad 4. Vypočítajme veľkosť oblasti A, ktorá je ohraničená nerovnosťami

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad \text{a} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 1.$$

Čísla a, b sú kladné konštanty.

Riešenie. Ak uvažujeme namiesto nerovností len rovnice, tak prvá rovnica je rovnicou elipsy s poloosami a a b a druhá je rovnicou priamky. (*Nakreslite.*)

Obe krivky sa pretínajú v bodoch $[a, 0]$ a $[0, b]$. Množina A je časť vnútra elipsy ležiaca nad priamkou.

Popíšeme ju ako oblasť typu xy.

Zrejme x-ová súradnica bodov oblasti A spĺňa

$$0 \leq x \leq a.$$

Ak vyjadríme y z oboch rovností, dostaneme

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

a

$$y = b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Popis oblasti je teda

$$0 \leq x \leq a,$$

$$b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) \leq y \leq b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Podľa vety o miere je

$$m(A) = \iint_A 1\,dxdy = \int_0^a \left(\int_{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1\,dy \right) dx = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx$$

Sčítanec $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ integrujeme pomocou substitúcie $x = a \sin t$, $dx = a \cos t\, dt$.

$$m(A) = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^2 t\, dt - b \left[x - \frac{x^2}{2a} \right]_0^a = \frac{\pi}{4}ab - \frac{1}{2}ab = \frac{\pi - 2}{4}ab.$$

(*V poslednom integráli sme použili vzorec* $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$.)