Prednáška 8.

Matematik je slepý človek v temnej miestnosti hľadajúci čiernu mačku, ktorá tam nie je. (Charles Darwin 1809 - 1882)

Dvojný integrál.

Prípravné pojmy.

Predstavme si, že miestnosť veľkosti 3,70m x 4,40m chceme pokryť kobercom. Nie však klasickým, ale lepením kobercových štvorcov. Tie sa predávajú vo veľkosti $1m^2$.

Máme na výber dve možnosti. Buď použijeme 12 štvorcov a pokryjeme plochu 3x4 a pri stenách ostanú nepokryté miesta, alebo použijeme 20 štvorcov na pokrytie plochy 4x5 a pri stenách budeme mať prebytky.

Naša miestnosť potrebuje koberec veľkosti buď 12 m^2 alebo 20 m^2.

Ak by boli dostupné aj štvorce veľkosti 0.5x0.5, tak by sme potrebovali najmenej 7x8 a najviac 8x9 takých štvorcov.

Jeden má plochu 0.25 m^2, teda naša spotreba je buď 14 m^2 alebo 18 m^2 koberca.

Všimnime si, že pomocou spotreby koberca, odhadujeme zdola a zhora veľkosť miestnosti.

Na čo je to dobré? Veď veľkosť miestnosti je predsa 3.7x4.4 t.j. 16.28 m^2.

Jednak poznamenajme, že to je presne výsledok, ktorý dostaneme pri použití štvorcov veľkosti 0.1x0.1, ale čo je zaujímavejšie, môžeme sa teraz pýtať, aká je veľkosť (plošná miera) útvaru, ktorý nemá tvar obdĺžnika, napríklad veľkosť povrchu jazera.

Poďme pridať trochu matematiky.

Obdĺžnik I_2

$$I_2 = \{[x, y];\ x \in [a, b]\ \wedge\ y \in [c, d]\}$$

nazvame dvojrozmerný interval. Môžeme ho zapísať aj ako

$$I_2 = [a, b] \times [c, d].$$

(Nakreslite si ho, $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$.)

Dĺžky jeho strán sú $b-a$ a $d-c$. Jeho veľkosť (miera) je $m(I_2) = (b-a)\cdot(d-c)$.

Uvažujme o delení D_1 intervalu $[a, b]$ na m častí.

$$D_1 = \{a = x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_m = b\}.$$

Podobne rozdeľme aj interval $[c, d]$ na y-ovej osi na n častí.

$$D_2 = \{c = y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_n = d\}.$$

Uvažujme teraz všetky obdĺžniky typu $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ pre všetky dvojice i, j pre $1 \leq i \leq m$ a $1 \leq j \leq n$.

Dvojrozmerný interval I_2 je zjednotenie všetkých takýchto obdĺžničkov I_{ij}. Dá sa povedať, že sme I_2 pokryli obdĺžničkami I_{ij} (nerovnakej veľkosti).

Množinu D (všetkých obdĺžničkov)

$$D = \{I_{ij};\ 1 \leq i \leq m \wedge 1 \leq j \leq n\}$$

nazveme delenie obdĺžnika I_2.

Veľkosť každého obdĺžnička I_{ij} je zrejme

$$m(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Pritom

$$m(I_2) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} m(I_{ij}).$$

A ako to bude s hladinou jazera?

Majme množinu J (jazero), $J \subset R^2$. Zvoľme obdĺžnik I_2, ktorý pokrýva celé jazero, $J \subset I_2$.

Zvoľme nejaké delenie D dvojrozmerného intervalu I_2 na obdĺžničky I_{ij}.

Všímajme si tie obdĺžničky I_{ij}, ktoré celé ležia v množine J, t.j. $I_{ij} \subset J$.

Súčet ich veľkostí nazveme vnútorná miera množiny J pri danom delení D. Tento súčet označíme $\underline{m}_D(J)$.

Teraz si všímajme tie obdĺžničky I_{ij}, ktoré aspoň nejakou časťou ležia v množine J, t.j. $I_{ij} \cap J \neq \emptyset$.

Súčet ich veľkostí nazveme vonkajšia miera množiny J pri danom delení D. Tento súčet označíme $\overline{m}_D(J)$.

Zrejme

$$\underline{m}_D(J) \leq \overline{m}_D(J).$$

Rozdiel medzi $\overline{m}_D(J)$ a $\underline{m}_D(J)$ je tým menší, čím jemnejšie delenie D pôvodného obdĺžnika sme si zvolili.

Jemnosť delenia D budeme merať pomocou dĺžok strán obdĺžničkov I_{ij}. Zmeriame každú stranu každého obdĺžnička a najdlhšiu stranu (najhorší prípad) vezmeme ako mierku. *(Zvykne sa volať norma delenia.)*

$$||D|| = max\{(x_i - x_{i-1}), (y_j - y_{j-1})\}$$

Čím je $||D||$ menšie, tým je delenie jemnejšie.

Suprémum všetkých vnútorných mier $\underline{m}_D(J)$ pri všetkých deleniach D, (v limitnom zmysle najväčšiu vnútornú mieru) označíme ako $\underline{m}(J)$ a nazveme vnútorná miera množiny J. (Toto číslo už nezávisí od D.)

Analogicky infimum všetkých vonkajších mier $\overline{m}_D(J)$ pri všetkých deleniach D, (v limitnom zmysle najmenšiu vonkajšiu mieru) označíme ako $\overline{m}(J)$ a nazveme vonkajšia miera množiny J.

Finále:

Definícia. Ak $\underline{m}(J) = \overline{m}(J)$, tak množinu J nazývame **merateľná**. Spoločnú hodnotu čísel $\underline{m}(J)$, $\overline{m}(J)$ značíme $m(J)$ a nazývame **miera** množiny J.

Na záver tejto časti poznamenajme, že jednotlivý bod v rovine má mieru 0 a takisto úsečka a hladká krivka má (plošnú) mieru 0.
Tiež len uveďme, že každá merateľná množina v R^2 má hranicu s mierou 0.

Elementárne oblasti.

V tejto časti uvedieme množiny v rovine, ktoré sú trochu zložitejšie ako obdĺžnik, ale dostatočne jednoduché na to, aby sme ich vedeli popísať pomocou nerovností.

Definícia. Nech φ, ψ sú spojité funkcie jednej premennej x definované na intervale $[a, b]$ a nech $\varphi(x) < \psi(x)$ vo vnútri intervalu $[a, b]$.
Elementárnou oblasťou typu xy nazývame množinu

$$M_{xy} = \{[x, y] \in R^2; \quad a \leq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Kvôli porozumeniu definícii skomentujme zápis aj slovne. Do množiny M_{xy} patria také body $[x, y]$, ktoré majú x-ovú súradnicu medzi a a b, teda z intervalu $[a, b]$. Súčasne ich y-ová súradnica je medzi hodnotami $\varphi(x)$ a $\psi(x)$.
Alebo úplne jednoducho (a trochu voľnejšie): Je to množina zhora ohraničená čiarou (*grafom funkcie*) $\psi(x)$ a zdola čiarou (*grafom funkcie*) $\varphi(x)$.

Príklad 1. Každý obdĺžnik $I_2 = [a, b] \times [c, d]$ je elementárna oblasť typu xy.

Naozaj

$$a \leq x \leq b,$$
$$c \leq y \leq d.$$

Funkcie $\varphi(x) = c$ a $\psi(x) = d$ sú v tomto príklade konštantné.

Príklad 2. Trojuholník ABC s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, 1]$ je elementárna oblasť typu xy. (Nakreslite si ho.)

Najprv si všimnime, že všetky body trojuholníka majú x-ovú súradnicu

$$0 \leq x \leq 2.$$

Podľa toho, aké x z intervalu $[0, 2]$ zvolíme, dostaneme hranice pre druhú súradnicu y.
Trojuholník je zdola ohraničený úsečkou AB, na nej je y-ová súradnica rovná 0.
Zhora je ohraničený (šikmou) úsečkou BC. Táto leží na priamke $x + 2y = 2$. Po vyjadrení $y = 1 - \frac{1}{2}x$. Teda

$$0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{2}x.$$

Spolu s podmienkou pre x:

$$0 \leq x \leq 2,$$
$$0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{2}x,$$

čo je dvojica nerovností z definície, pričom $\varphi(x) = 0$ a $\psi(x) = 1 - \frac{1}{2}x$.

Podobnú definíciu elementárnej oblasti dostaneme, ak vymeníme úlohy premenných y a x.

Definícia. Nech φ, ψ sú spojité funkcie jednej premennej y definované na intervale $[c, d]$ a nech $\varphi(y) < \psi(y)$ vo vnútri intervalu $[c, d]$.

Elementárnou oblasťou typu yx nazývame množinu

$$M_{yx} = \{[x, y] \in R^2; \;\; c \leq y \leq d, \; \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Príklad 3. Každý obdĺžnik $I_2 = [a, b] \times [c, d]$ je aj elementárna oblasť typu yx.

Zrejme

$$c \leq y \leq d,$$
$$a \leq x \leq b.$$

Funkcie $\varphi(y) = a$ a $\psi(y) = b$ sú v konštantné.

Príklad 4. Trojuholník ABC s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, 1]$ je aj elementárna oblasť typu yx.

(Už ho máte nakreslený v Príklade 2.)

Na rozdiel od príkladu 2, teraz začneme súradnicou y. Všetky body trojuholníka majú y-ovú súradnicu

$$0 \leq y \leq 1.$$

Podľa toho, aké y z intervalu $[0, 1]$ zvolíme, dostaneme hranice pre x.

Trojuholník je zľava ohraničený úsečkou AC, na ktorej je x-ová súradnica rovná nule.

Sprava je ohraničený (šikmou) úsečkou BC. Táto leží na priamke $x + 2y = 2$. Tentokrát vyjadríme $x = 2 - 2y$. Teda

$$0 \leq x \leq 2 - 2y.$$

Nerovnosti spolu dávajú popis elementárnej oblasti typu yx:

$$0 \leq y \leq 1,$$
$$0 \leq x \leq 2 - 2y.$$

Príklad 5. Množina M, ohraničená parabolami $y = 2x^2$ a $y = x^2 + 1$ je elementárna oblasť typu xy, ale nie je elementárna oblasť typu yx.

(Nakreslite.)

Ak dáme do rovnosti vyjadrenia y, dostaneme rovnicu

$$2x^2 = x^2 + 1.$$

Riešenia sú $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. To sú x-ové súradnice priesečníkov parabol.

Pre $x \in [-1, 1]$ je $2x^2 \leq x^2+1$. *(To je zrejmé z nerovnosti $x^2 \leq 1$ pre $x \in [-1, 1]$.)*

Teraz

$$-1 \leq x \leq 1,$$
$$2x^2 \leq y \leq x^2 + 1,$$

čo je popis elementárnej oblasti typu xy.

(Rozmyslite si, prečo M nie je elementárna oblasť typu yx. Stačí argumentovať pomocou obrázku.

Nakreslená oblasť M sa dá vyšrafovať zvislými úsečkami. Každá začína na parabole $2x^2$ a končí na parabole $x^2 + 1$. Tento obrázok zodpovedá elementárnej oblasti typu xy.

Ak sa pokúsime oblasť M vyšrafovať vodorovnými úsečkami, zistíme, že napríklad pre $y = 1.5$ potrebujeme až dve úsečky, nestačí jedna. Preto sa M nedá popísať nerovnosťami $c \leq y \leq d$, $\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$ a nie je elementárnou oblasťou typu yx.)

Dvojný integrál na obdĺžniku.

Našou motivačnou predstavou v tejto kapitole bude cirkusový stan. Má nepravidelnú podlahu, rôzne vysoké bočné steny a rôznu výšku stropu. Otázka, ktorú budeme riešiť je: Aký je objem stanu?

Dvojný integrál, ktorý budeme definovať, je analógiou určitého integrálu funkcie jednej premennej. Tam sme počítali obsah plochy ohraničenej zhora krivkou (grafom funkcie jednej premennej), teraz budeme počítať objem telesa ohraničeného zhora plochou (grafom funkcie dvoch premenných).

V tejto časti bude ešte podlaha nášho stanu jednoduchá, bude to obdĺžnik I_2.

Ak by bola aj „strecha” jednoduchá, konkrétne konštantne vysoká, objem takéhoto kvádra je súčin veľkosti základne a výšky.

Pri nekonštantných funkciách $f(x, y)$ si pomôžeme nasledovne:

Tak ako v predošlej časti rozdelíme definičný obor t.j. interval I_2 na malé obdĺžničky. Urobíme delenie D. Na každom malom obdĺžničku delenia D nahradíme šikmú strechu rovnou, funkciu $f(x, y)$ nahradíme konštantou. Konštantu zvolíme tak, že vyberieme jeden bod c_{ij} z obdĺžnička I_{ij} a zmeriame výšku v tomto bode, to je hodnota $f(c_{ij})$ *(bod c_{ij} má dve súradnice).*

Tým vytvoríme kvádrik s objemom

$$m(I_{ij}) \cdot f(c_{ij}) = f(c_{ij}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Objem celého telesa budeme aproximovať súčtom objemov všetkých kvádrikov. Túto aproximáciu nazveme integrálny súčet funkcie f pri delení D a voľbe c_{ij},

$$S(f, D) = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} f(c_{ij}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Prirodzene očakávame, že čím jemnejšie delenie I_2 zvolíme, (v zmysle menšieho $||D||$), tým presnejšie vypočítame objem telesa pod funkciou $f(x, y)$. A to chceme dokonca bez ohľadu na voľbu bodov c_{ij}.

Definícia. Nech $f : I_2 \to R$. Ak pre každú postupnosť D_k delení intervalu I_2 takú, že $\lim_{k\to\infty} ||D_k|| = 0$, a pre každú voľbu c_{ij} existuje jediná konečná limita

$$\lim_{k\to\infty} S(f, D_k) = L,$$

tak číslo L nazývame **dvojný integrál** funkcie f na obdĺžniku I_2.

Označujeme

$$L = \iint_{I_2} f(x, y)\, dxdy.$$

Funkciu f nazývame integrovateľná na I_2.

Nasledujúce dve tvrdenia hovoria, že „rozumné” funkcie sú integrovateľné.

Veta. *Každá spojitá funkcia dvoch premenných $f : I_2 \to R$ je integrovateľná na obdĺžniku I_2.*

Veta. *Každá ohraničená funkcia dvoch premenných $f : I_2 \to R$, ktorej množina bodov nespojitosti má mieru 0, je integrovateľná na I_2.*

V predošlej vete si predstavte funkciu, ktorá je nespojitá len na nejakej krivke.

Fubiniho veta na obdĺžniku.

Už vieme, čo je dvojný integrál funkcie $f(x, y)$ na obdĺžniku I_2, ale nevieme, ako ho vypočítať. Pomocou limity z definície by to bolo veľmi nepraktické.

Nástroj na výpočet nám dáva Fubiniho veta.

Predstava o Fubiniho vete je nasledovná. Majme definičný obdĺžnik $I_2 = [a, b] \times [c, d]$ a funkciu $f(x, y)$. Urobme rez v smere osi y v mieste x_0, teda parciálnu funkciu $f(x_0, y)$. Spočítajme veľkosť plochy pod grafom tejto parciálnej funkcie jednej premennej y.

To je integrál jednej premennej y, $\int_c^d f(x_0, y)\, dy$.

Zopakujme takýto rez a výpočet plochy pre všetky x_0 z intervalu $[a, b]$. Súčet od a po b veľkostí všetkých plôch dáva veľkosť telesa pod grafom.

Vyzerá to, akoby sme nepravidelnú salámu nakrájali na tenké plátky a počítali veľkosť salámy ako súčet plátkov. (*Predstava, že plátky sú nekonečne tenké a je ich nekonečne veľa, je snom každého bufetára.*)

Veta (Fubini na intervale). *Nech $M = [a, b] \times [c, d]$ je obdĺžnik a $f : M \to R$ je integrovateľná funkcia. Nech pre každé $x \in [a, b]$ existuje integrál*

$$K(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Potom

$$\iint\limits_M f(x, y)\, dxdy = \int_a^b K(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Ak to, čo počítame je objem zemiaka, tak definícia dvojného integrálu krája zemiak na hranolky. Fubiniho prínos spočíva v tom, že krája ten istý zemiak na chipsy.

Príklad 6. Vypočítajme

$$\iint\limits_M xy + y^2\, dxdy$$

ak $M = [0, 1] \times [1, 3]$.

Zvoľme nejaké (v tomto kroku pevné) x z intervalu $[0, 1]$ a počítajme

$$K(x) = \int_1^3 xy + y^2\, dy,$$

v ktorom je premenná len y.

$$\int_1^3 xy + y^2\, dy = \left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_1^3 = \frac{9}{2}x + 9 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 4x + \frac{26}{3}$$

Výsledok závisí od zvoleného x.

Teraz dáme dohromady (zintegrujeme) všetky výsledky pre všetky voľby x z intervalu $[0, 1]$:

$$\int_0^1 4x + \frac{26}{3}\, dx = \left[2x^2 + \frac{26}{3}x \right]_0^1 = 2 + \frac{26}{3} = \frac{32}{3}.$$

V prípade obdĺžnika a spojitej funkcie je jedno, v akom smere volíme rezy grafom funkcie f. Tak ako sme volili pevné x a robili rez v smere osi y, môžeme úlohy x a y vymeniť.

Dostaneme alternatívne znenie Fubiniho vety.

Veta (Fubini na intervale v opačnom poradí). *Nech $M = [a,b] \times [c,d]$ je obdĺžnik a $f : M \to R$ je integrovateľná funkcia. Nech pre každé $y \in [c,d]$ existuje integrál*

$$K(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Potom

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = \int_c^d K(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Príklad 7. Vypočítajme

$$\iint\limits_M \frac{1}{(2x+y+1)^2}\,dxdy$$

ak $M = [0,4] \times [0,1]$.

Príklad sa dá počítať oboma postupmi. Kvôli demonštrácii poslednej vety zvoľme y z intervalu $[0,1]$ a počítajme

$$K(y) = \int_0^4 \frac{1}{(2x+y+1)^2}\,dx,$$

v ktorom je premenná len x.

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+y+1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{2(2x+y+1)} \right]_0^4 = \frac{-1}{2(9+y)} + \frac{1}{2(y+1)}$$

Výsledok je funkcia premennej y.

Teraz počítame určitý integrál výslednej funkcie v hraniciach pre premennú y:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-1}{2(9+y)} + \frac{1}{2(y+1)}\,dy = \left[\frac{-1}{2}\ln(9+y) + \frac{1}{2}\ln(y+1) \right]_0^1 &= \\ = -\frac{1}{2}\ln 10 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 1 &= \\ = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}&.\end{aligned}$$

Môžete vyskúšať postup v opačnom poradí. Výsledok musí byť rovnaký.

A na záver:

Varovanie ministerstva školstva: V niektorých príkladoch obtiažnosť výpočtu závisí od zvoleného poradia integrovania.