Prednáška 7.

Dobrý kresťan sa má držať ďalej od matematikov a všetkých tých, ktorí robia plané predpovede, zvlášť vtedy, keď sa tieto predpovede vyplňujú.

Je totiž nebezpečie, že matematici v spolku s diablom mätú rozum a zapletajú človeka do spárov pekelných. (Aurelius Augustinus 354 - 430)

Ak sa teraz spolu pustíme do nasledujúcej témy, nemôžete povedať, že som vás nevaroval...

Viazané a absolútne extrémy.

Viazané extrémy.

Pokračujme v našej predstave o pohybe v zvlnenej krajine. Sme na výlete a prešli sme trasu, pri ktorej sme nevystúpili na žiaden vrchol kopca. Napriek tomu sme išli aj do kopca, aj dolu kopcom a v niektorých miestach sa cesta hore menila na cestu dolu. Takéto miesta nazveme lokálne maximá viazané na našu trasu, skrátene viazané maximá.

Podobne si vieme predstaviť lokálne minimá viazané na danú trasu.

Našu trasu popíšeme pomocou funkcie jednej premennej t, podobne ako sme pri výpočte limít popisovali zúženia.

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je funkcia dvoch premenných $f(x, y)$. Nech je podmienkou $g(x, y) = 0$ daná krivka v rovine R^2 a nech $\varphi(t) : I \subset R \to R^2$ je taká funkcia jednej premennej t, pre ktorú $g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$.

Ak existuje okolie $O_\delta(t_0) \subset I$ a t_0 je lokálny extrém zloženej funkcie $f(\varphi(t))$, tak bod $[x_0, y_0]=[\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)]$ nazývame **viazaný extrém** funkcie f vzhľadom na podmienku g.

Príklad 1. Demonštrujme definíciu na jednoduchom príklade.

Uvažujme funkciu

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \text{„}\textit{terén}\text{”},$$

a podmienku

$$g(x, y) = y - 1 = 0 \qquad \text{„}\textit{trasa}\text{”}.$$

Z podmienky je zrejmé, že $y = 1$, čo je rovnica priamky rovnobežnej s osou x.

Parametrické rovnice tejto priamky sú

$$x = t,$$
$$y = 1.$$

Funkcia φ je funkcia $\varphi(t) = (t, 1)$. Zrejme platí, že

$$g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = g(t, 1) = 1 - 1 = 0.$$

Dosadením do funkcie f dostaneme

$$f(t,1) = t^2 + 1.$$

Elementárnym výpočtom zistíme, že $t_0 = 0$ je bod ostrého lokálneho minima funkcie $t^2 + 1$.

Bodu $t_0 = 0$ odpovedá na priamke

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 1, \end{aligned}$$

bod $[x_0, y_0] = [t_0, 1] = [0, 1]$. Tento bod je bodom viazaného ostrého lokálneho minima funkcie f vzhľadom na väzbu $g(x,y) = 0$.

Všimnime si, že bod $[0,1]$ nie je bodom lokálneho minima samotnej funkcie f, tým je bod $[0,0]$, ktorý ale neleží na našej ceste, lebo $g(0,0) = -1$ a nie nula. (*Viazané lokálne minimum nemusí byť lokálne minimum danej funkcie, naša trasa nemusí viesť cez vrchol kopca, ani cez dno jamy.*)

Ďalej si všimnime, že z pôvodnej úlohy pre funkciu dvoch premenných $f(x,y)$, sme použitím podmienky g dostali úlohu na hľadanie lokálneho extrému funkcie jednej premennej t.

Dá sa povedať, že podmienka $g(x,y) = 0$ úlohu zjednodušila tým, že znížila počet premenných o jednu. (*O jeden sa znížil počet stupňov voľnosti.*)

Príklad 2. Nájdime viazané extrémy funkcie

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2,$$

vzhľadom na podmienku

$$2x + y = 1.$$

Riešenie.

Podmienka je rovnicou priamky. Upravíme ju do tvaru $y = 1 - 2x$. Funkcia φ je daná jej parametrickými rovnicami $\varphi(t) = (t, 1-2t)$. Dosadením do funkcie f dostaneme

$$f(t, 1-2t) = 2t^2 + 3(1-2t)^2 = 14t^2 - 12t + 3.$$

Označme $h(t) = 14t^2 - 12t + 3$ a hľadajme lokálne extrémy funkcie h jednej premennej,

$$h'(t) = 28t - 12, \qquad \text{a teda } h'(t) = 0 \text{ pre } t_0 = \frac{3}{7}.$$

Zrejme

pre $t < \frac{3}{7}$ je derivácia $h'(t) < 0$, t.j. $h(t)$ je klesajúca

a pre $t > \frac{3}{7}$ je derivácia $h'(t) > 0$, t.j. $h(t)$ je rastúca.

Preto $t_0 = \frac{3}{7}$ je bod lokálneho minima funkcie h. Dosadením t_0 do $\varphi(t)$ dostaneme bod $[\frac{3}{7}, \frac{1}{7}]$, ktorý je bodom viazaného lokálneho minima funkcie f.

Príklad 3. Nájdime viazané extrémy funkcie

$$f(x,y) = x^2 + 4xy - 4y^2,$$

ležiace na krivke

$$\varphi(t) = (t^2, t^3).$$

Riešenie.

Úloha je zjednodušená tým, že krivka $\varphi(t)$ je priamo zadaná. Dosadením φ do funkcie f dostaneme

$$f(t^2, t^3) = t^4 + 4t^5 - 4t^6.$$

Označme $h(t) = t^4 + 4t^5 - 4t^6$ a hľadajme lokálne extrémy funkcie h.

$$h'(t) = 4t^3 + 20t^4 - 24t^5,$$

$$\text{a teda } h'(t) = 0 \text{ pre } t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3 = -\frac{1}{6}.$$

Určením znamienok $h'(t)$ dostaneme, že pre
$t \in (-\infty, -\frac{1}{6}]$ a $t \in [0, 1]$ je derivácia $h'(t) > 0$, t.j. $h(t)$ je rastúca,
a pre
$t \in [-\frac{1}{6}, 0]$ a $t \in [1, \infty]$ je derivácia $h'(t) < 0$, t.j. $h(t)$ je klesajúca.

Preto $t_1 = 0$, je OLMIN funkcie h a $t_2 = 1$, aj $t_3 = -\frac{1}{6}$ sú OLMAX funkcie h. Dosadením do funkcie φ dostaneme, že

$[0, 0]$ je viazané OLMIN funkcie f a

$[1, 1]$ aj $[\frac{1}{36}, -\frac{1}{216}]$ sú viazané OLMAX funkcie f.

Príklad 4. Nájdime viazané extrémy funkcie

$$f(x,y) = xy,$$

vzhľadom na podmienku

$$y = x^2 - 1.$$

Riešenie.

V podmienke, ktorá je rovnicou paraboly, máme priamo vyjadrenú premennú y. Môžeme teraz položiť $x = t$ a vyjadriť $y = t^2 - 1$. Funkcia $\varphi(t) = (t, t^2 - 1)$ je parametrizáciou danej paraboly a zložená funkcia $f(\varphi(t))$ je

$$h(t) = f(t, t^2 - 1) = t^3 - t.$$

Vypočítame

$$h'(t) = 3t^2 - 1,$$

a z rovnice

$$3t^2 - 1 = 0 \text{ dostaneme stacionárne body } t_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pretože $h''(t) = 6t$, je
$h''(t_1) = h''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$ a $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ je bod OLMIN funkcie h.

Bod $[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}]$ je potom bod viazaného OLMIN funkcie f vzhľadom na podmienku $y = x^2 - 1$.

Podobne
$h''(t_2) = h''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$ a $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ je bod OLMAX funkcie h.

Bod $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}]$ je bod viazaného OLMAX funkcie f vzhľadom na podmienku $y = x^2 - 1$.

Poznamenajme, že pri riešení nie je nutné zaviesť novú premennú t, rovnaký výsledok dostaneme aj po priamom dosadení $y = x^2 - 1$ do funkcie f.

Príklad 5*. Nájdime viazané extrémy funkcie

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y,$$

ležiace na kružnici

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Riešenie.

Dvojica $x = 5\cos t$ a $y = 5\sin t$ vyhovuje rovnici kružnice pre ľubovoľné t a funkcia $\varphi(t) = (5\cos t, 5\sin t)$ je parametrizáciou danej kružnice.

Dosadením do funkcie f dostaneme

$$h(t) = f(5\cos t, 5\sin t) = 25 - 60\cos t + 80\sin t.$$

Hľadajme lokálne extrémy funkcie h.

$$h'(t) = 60\sin t + 80\cos t,$$

a teda

$$h'(t) = 0 \quad \text{ak} \quad \operatorname{tg} t = -\frac{4}{3} \quad \text{t.j. } t = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + k\pi.$$

Typ stacionárneho bodu určíme pomocou druhej derivácie h.

$$h''(t) = 60\cos t - 80\sin t = 5\cos t\,(12 - 16\operatorname{tg} t)$$

a

$$h''(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + k\pi) = 5\cos(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + k\pi)\left(12 - 16\cdot(-\frac{4}{3})\right).$$

Pretože posledná zátvorka je kladná, znamienko druhej derivácie je určené znamienkom funkcie kosínus.

Pre $k = 0$ je $\cos(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)) > 0$ a v tomto bode je druhá derivácia kladná. Funkcia h má v tomto bode OLMIN.

Po dosadení do φ dostaneme bod

$$\left[5\cos\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right),\ 5\sin\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right] = [3, -4],$$

ktorý je bodom viazaného OLMIN.

Pre $k = 1$ je $\cos(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi) < 0$ a v tomto bode je druhá derivácia záporná. Funkcia h má v tomto bode OLMAX.

Po dosadení do φ dostaneme bod

$$[5\cos(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi), 5\sin(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi)] = [-3, 4],$$

ktorý je bodom viazaného OLMAX.

Pre ďalšie hodnoty $k \in Z$ sa body $[3, -4]$ a $[-3, 4]$ periodicky opakujú.

Na danej kružnici má funkcia f viazané OLMIN v bode $[3, -4]$ a viazané OLMAX v bode $[-3, 4]$.

Absolútne extrémy.

Pokračujme v našej geografickej exkurzii a pýtajme sa na najvyšší a najnižší bod na nejakom ohraničenom území. Na Slovensku je najvyšší Gerlachovský štít (to každý vie) a najnižší bod je pri Strede nad Bodrogom. Zatiaľ, čo najvyšší bod je vo vnútrozemí a je aj lokálnym extrémom, najnižší bod je na hraniciach a je viazaným extrémom. (*S trochou skreslenia kvôli výkladu.*)

Absolútny extrém teda môže byť buď niektorý z lokálnych extrémov, alebo niektorý z viazaných extrémov.

Späť k matematike.

Definícia. Nech $f : M \subset R^n \to R$ je funkcia definovaná na množine M.

Hovoríme, že funkcia f má v bode a absolútne maximum (resp. absolútne minimum), ak $\forall \bar{x} \in M$ platí $f(\bar{x}) \leq f(a)$, (resp. $f(\bar{x}) \geq f(a)$).

Hodnotu $f(a)$ nazývame **absolútne maximum** (resp. **absolútne minimum**) funkcie f na množine M.

Zatiaľ, čo lokálny alebo viazaný extrém funkcia mohla, ale nemusela mať, pri absolútnych extrémoch máme za rozumných predpokladov o funkcii a jej definičnom obore zaručené, že absolútne maximum aj absolútne minimum existujú.

(*Absolútny extrém sa môže nadobúdať vo viacerých bodoch. Na príklade konštantnej funkcie vidíme, že všetky body definičného oboru sú bodmi absolútneho maxima aj minima súčasne.*)

Veta. *Spojitá funkcia $f : M \subset R^n \to R$ definovaná na ohraničenej a uzavretej oblasti M nadobúda na tejto oblasti absolútne maximum aj absolútne minimum.*

Absolútny extrém môže funkcia nadobúdať buď vo vnútri oblasti M, vtedy je ním niektorý lokálny extrém, alebo na hranici (v prípade R^2 hraničnej krivke), vtedy je ním niektorý viazaný extrém.

Pri hľadaní absolútnych extrémov postupujeme tak, že nájdeme všetky lokálne extrémy funkcie f ležiace v množine M a všetky viazané extrémy funkcie f s podmienkou popisujúcou niektorú časť hranice množiny M.

Pritom netreba rozhodnúť, či je stacionárny bod aj bodom lokálneho extrému, na nájdenie absolútneho maxima a minima stačí porovnať funkčné hodnoty v stacionárnych bodoch a vybrať najväčšiu resp. najmenšiu funkčnú hodnotu.

Ak sa dve alebo viaceré hranice pretínajú v bode, tieto body pridávame k stacionárnym bodom (*chápeme ich ako špeciálne jednobodové časti hranice*) a počítame funkčné hodnoty aj v nich.

Príklad 6. Nájdime absolútne extrémy funkcie

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

na uzavretej a ohraničenej množine $M = \{[x,y];\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 4\}$.

Riešenie.

Množina M je trojuholník ABC s vrcholmi $A = [0,0]$, $B = [4,0]$ a $C = [0,4]$. (*Nakreslite si.*)

a, Hľadajme lokálne extrémy funkcie f vo vnútri trojuholníka M.
Riešme sústavu dvoch rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y = 0.$$

Riešením je $x = 1,\ y = 1$. Stacionárny bod $D = [1,1]$ leží v M.

b, Hľadajme viazané extrémy funkcie f.

b1, Začneme úsečkou AB, na ktorej je $y = 0$. Dosadením do f dostaneme

$$f(x,0) = x^2 - 6x - 1$$

(*uvedomme si, že sme použili zloženú funkciu* $f \circ \varphi$). Označme

$$h(x) = x^2 - 6x - 1$$

a počítajme $h'(x) = 2x - 6$.

Preto $x = 3$ je stacionárny bod h. Doplnením y-ovej súradnice dostávame bod $E = [3,0]$, ktorý by mohol byť bodom viazaného extrému funkcie f.

b2, Pokračujeme úsečkou AC, na ktorej je $x = 0$. Dosadením do f dostaneme

$$f(0,y) = -2y^2 - 1$$

Označme

$$h(y) = -2y^2 - 1$$

a počítajme $h'(y) = -4y = 0$.

Preto $y = 0$ je stacionárny bod h. Bod $A = [0,0]$ by mohol byť bodom viazaného extrému funkcie f.

b3, Nakoniec uvažujeme úsečku BC, na ktorej je $x+y=4$. Vyjadrením $y=4-x$ a dosadením do f dostaneme

$$f(x,4-x)=x^2-2(4-x)^2+4x(4-x)-6x-1=-5x^2+26x-33.$$

Opäť označme

$$h(x)=-5x^2+26x-33$$

a počítajme $h'(x)=-10x+26$.

Zrejme $x=\frac{13}{5}$ je stacionárny bod h. Dopočítaním y-ovej súradnice dostávame bod $F=[\frac{13}{5},\frac{7}{5}]$, ktorý by mohol byť bodom viazaného extrému funkcie f.

Na záver vypočítame hodnoty funkcie f vo bodoch A až F.

$$f(A)=-1,\quad f(B)=-9,\quad f(C)=-33,\quad f(D)=-4,\quad f(E)=-10,\quad f(F)=\frac{4}{5}$$

Absolútne minimum funkcie f je -33 a nadobúda sa v bode C.
Absolútne maximum funkcie f je $\frac{4}{5}$ a nadobúda sa v bode F.

Príklad 7. Nájdime absolútne extrémy funkcie

$$f(x,y)=xy$$

na množine $M=\{[x,y];\ x^2-1\le y\le 1-x^2\}$.

Riešenie.

Množina M je ohraničená dvoma parabolami, ktoré sa pretínajú v bodoch s x-ovou súradnicou

$$x^2-1=1-x^2,$$

teda v bodoch $A=[1,0]$ a $B=[-1,0]$

(*Nakreslite si.*)

a, Hľadajme lokálne extrémy funkcie f vo vnútri množiny M

(*„na medzi para bolí”*).

Riešme sústavu dvoch rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x=0.$$

Riešením je $x=0,\ y=0$. Stacionárny bod $C=[0,0]$ leží vnútri množiny M.

b, Hľadajme viazané extrémy funkcie f.

b1, Začneme parabolou $y = x^2 - 1$. Dosadením do f dostaneme

$$f(x, x^2 - 1) = x^3 - x.$$

Označme

$$h(x) = x^3 - x$$

a počítajme

$h'(x) = 3x^2 - 1$. Stacionárne body funkcie h sú body $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Doplnením y-ovej súradnice dostávame body $D = [\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}]$, $E = [-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}]$, ktoré by mohli byť bodmi viazaného extrému funkcie f.

b2, Pokračujeme parabolou $y = 1 - x^2$. Dosadením do f dostaneme

$$f(x, 1 - x^2) = x - x^3.$$

Označme

$$h(x) = x - x^3$$

a počítajme

$h'(x) = 1 - 3x^2$. Stacionárne body funkcie h sú opäť body $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Doplnením y-ovej súradnice ale dostávame body $F = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}]$, $G = [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}]$, ktoré by mohli byť bodmi viazaného extrému funkcie f.

Na záver vypočítame hodnoty funkcie f v bodoch A až G.

$$f(A) = f(B) = f(C) = 0, \quad f(D) = f(G) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(E) = f(F) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Absolútne minimum funkcie f je $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ a nadobúda sa v bodoch D a G.
Absolútne maximum funkcie f je $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ a nadobúda sa v bodoch E a F.