Prednáška 5.

Matematici sú všeobecne prihorliví ohľadom stručnosti a vo svojej vášni pre krátkosť sa oddávajú symbolom, aj vtedy, keď sa nezdajú byť lepšie, ako známe slovné spojenie. Chybný úsudok spôsobil, že matematici uprednostnili eleganciu a stručnosť za cenu zrozumiteľnosti.

Morris Kline, Matematika a svet (1959)
(trochu som tento výrok zostručnil...)

Prvá kapitola tejto prednášky je trochu technická, a to doslova, popisuje techniku počítania parciálnych derivácií.

Ďalšie kapitoly, ktoré sa týkajú druhých parciálnych derivácií a druhého diferenciálu, budeme využívať pri testovaní lokálnych extrémov.

Derivácia zloženej funkcie. Reťazové pravidlo.

V tejto časti popíšeme pravidlo derivovania zloženej funkcie. Nebudeme sa zaoberať všeobecnou situáciou, zameriame pozornosť len na dva prípady.

1. prípad.

Predpokladajme, že vonkajšia zložka je funkcia $\varphi(t)$ jednej premennej t, a vnútorná zložka je funkcia dvoch premenných $f(x, y)$.

Zložená funkcia $\varphi(f(x, y))$ je teda funkcia, ktorá dvojici (x, y) predpisom f priradí hodnotu $t = f(x, y)$. Táto hodnota t je vstupom do funkcie φ. Výsledná hodnota zloženej funkcie je $\varphi(t) = \varphi(f(x, y))$.

Našim cieľom je uviesť pravidlo pre derivovanie zloženej funkcie $\varphi(f(x, y))$. Označme ju ako F:

$$F(x, y) = \varphi(f(x, y)).$$

V tomto prípade analogicky, ako pre funkciu jednej premennej, platí :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \varphi'(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

a tiež

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \varphi'(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Príklad 1.

Majme danú vonkajšiu zložku

$$\varphi(t) = \sqrt{t}, \quad \varphi : R_0^+ \to R$$

a vnútornú zložku

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad f : R^2 \to R.$$

Počítajme parciálne derivácie zloženej funkcie

$$F(x,y) = \varphi(f(x,y)) = \sqrt{(x^2+y^2)}.$$

Dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \cdot 2y.$$

Definičný obor oboch parciálnych derivácií je $R^2 \setminus \{[0,0]\}$.

Príklad 2. Majme danú konkrétnu vnútornú zložku

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Vonkajšia zložka je teraz daná len všeobecne ako funkcia $\varphi(t)$.
Počítajme parciálne derivácie zloženej funkcie

$$F(x,y) = \varphi(f(x,y)) = \varphi(x^2+y^2).$$

Dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x^2+y^2) \cdot 2x$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(x^2+y^2) \cdot 2y.$$

Teraz môžeme overiť, že funkcia $F(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ je riešením rovnice

$$y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

a to pre ľubovoľnú vonkajšiu zložku φ.

2. prípad

Predpokladajme teraz, že vonkajšia zložka je funkcia $h(u,v)$, dvoch premenných u a v. Vnútorná zložka je dvojica funkcií (t.j. vektorová funkcia) dvoch premenných $f(x,y)$ a $g(x,y)$.

Zložená funkcia $F(x,y) = h(u,v) = h(f(x,y), g(x,y))$ je teraz funkcia, ktorá dvojici (x,y) predpismi $u = f(x,y)$ a $v = g(x,y)$ priradí dvojicu (u,v), ktorá je vstupom do funkcie h. Hodnota $h(u,v)$ je hodnota zloženej funkcie F v bode (x,y).

Parciálna derivácia F podľa x je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial u}(f(x,y), g(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial h}{\partial v}(f(x,y), g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

Podobne

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial u}(f(x,y), g(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial h}{\partial v}(f(x,y), g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

Vyššie uvedená formula sa zvykne nazývať reťazové pravidlo.

Prehľadnejší je zápis reťazového pravidla bez uvedenia argumentov funkcií:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial y},$$

alebo tiež

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Príklad 3. Majme dané vnútorné zložky

$$f(x,y) = x + y,$$
$$g(x,y) = x - y,$$

a vonkajšiu zložku

$$h(u,v) = uv.$$

Počítajme parciálne derivácie zloženej funkcie

$$F(x,y) = h(f(x,y), g(x,y)).$$

Teraz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 1,$$
$$\frac{\partial h}{\partial u} = v, \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = u.$$

Podľa reťazového pravidla je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = v + u.$$

Pretože $u = f(x,y) = x + y$ a $v = g(x,y) = x - y$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = v + u = x + y + x - y = 2x.$$

Podobne vieme vypočítať

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y.$$

Poznamenajme, že v úlohách ako vyššie je spravidla jednoduchšie vyjadriť najprv zloženú funkciu

$$F(x,y) = uv = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

a potom počítať derivácie.

Druhé parciálne derivácie.

Podobne ako v prípade funkcie jednej premennej vieme aj pre funkcie viacerých premenných definovať parciálne derivácie vyšších rádov. Pre naše potreby postačia druhé parciálne derivácie.

Majme funkciu $F(x,y)$, $A \subset F : R^2 \to R$, ktorá je diferencovateľná na svojom definičnom obore A.

Vypočítajme jej deriváciu podľa premennej x.

Označme ju ako novú funkciu

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Ak má funkcia g parciálne derivácie, tak funkciu $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ nazývame druhá parciálna derivácia f podľa premennej x a značíme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

alebo tiež

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}.$$

Analogicky definujeme druhé parciálne derivácie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Funkcia $f(x,y)$ má teda štyri druhé parciálne derivácie.

V bežných situáciách sú ale takzvané zmiešané parciálne derivácie f''_{xy} a f''_{yx} rovnaké. (*Všimnite si poradie indexov pri zápise zmiešaných parciálnych derivácií.*)

Veta. *Ak sú zmiešané parciálne derivácie f''_{xy} a f''_{yx} spojité, tak*

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Presnejšie, ak sú zmiešané parciálne derivácie spojité na okolí bodu $\bar{x}$, tak

$$f''_{xy}(\bar{x}) = f''_{yx}(\bar{x}).$$

Ak sú zmiešané parciálne derivácie spojité na množine A, tak rovnosť

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

platí pre každý bod $(x,y) \in A$.

Príklad 4. Majme funkciu

$$f(x,y) = x^3y^2 + x^2 - xy + y + 1.$$

Vypočítajme jej druhé parciálne derivácie.

Najprv si pripravme

$$f'_x = 3x^2y^2 + 2x - y,$$
$$f'_y = 2x^3y - x + 1.$$

Teraz

$$f''_{xx} = 6xy^2 + 2,$$
$$f''_{xy} = 6x^2y - 1 = f''_{yx},$$
$$f''_{yy} = 2x^3.$$

Zmiešané parciálne derivácie sú si rovné, pretože funkcia $6x^2y - 1$ je spojitá na celom R^2.

Druhý diferenciál a Taylorov polynóm 2. stupňa.

Pripomeňme si funkciu jednej premennej, kedy sme testovali stacionárny bod pomocou druhej derivácie a výraz $f''(x_0)(x - x_0)^2$ sme nazvali druhý diferenciál funkcie f v bode x_0.

Podobne pre funkciu dvoch premenných definujeme nižšie uvedený výraz, závislý na hodnotách druhých parciálnych derivácií ako druhý diferenciál.

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ má spojité druhé parciálne derivácie na svojom definičnom obore A a nech bod $a = [x_0, y_0] \in A$.

Výraz

$$d^2f(a, h, k) = f''_{xx}(a) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a) \cdot hk + f''_{yy}(a) \cdot k^2$$

nazývame druhý diferenciál funkcie f v bode a. Premenné h, k sú prírastky v smere jednotlivých osí, $h = x - x_0$, $k = y - y_0$.

Príklad 5.

Vypočítajme druhý diferenciál funkcie (z príkladu 4)

$$f(x, y) = x^3y^2 + x^2 - xy + y + 1$$

v danom bode $a = [1, 2]$.

Druhé parciálne derivácie sme vypočítali v predchádzajúcej časti textu.

$$f''_{xx} = 6xy^2 + 2,$$
$$f''_{xy} = 6x^2y - 1 = f''_{yx},$$
$$f''_{yy} = 2x^3.$$

Ich hodnoty v bode a sú

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(a) &= 26, \\
f''_{xy}(a) &= 11 = f''_{yx}(a), \\
f''_{yy}(a) &= 2.
\end{aligned}
$$

Teraz

$$d^2 f(a,h,k) = 26 \cdot h^2 + 22 \cdot hk + 2 \cdot k^2.$$

Lepšiu predstavu o tom, na čo slúži druhý diferenciál, dostaneme z pojmu Taylorov polynóm 2. stupňa.

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ má spojité druhé parciálne derivácie na svojom definičnom obore A a nech bod $a = [x_0, y_0] \in A$.
Polynóm

$$T_2 f(a,h,k) = f(a) + d^1 f(a,h,k) + \frac{1}{2} d^2 f(a,h,k)$$

nazývame Taylorov polynóm 2. stupňa funkcie f v bode a v premenných h, k.

Príklad 6.
Vypočítajme Taylorov polynóm 2. stupňa funkcie

$$f(x,y) = x^3y^2 + x^2 - xy + y + 1$$

v bode $a = [1,2]$.
V príklade 4 sme vypočítali

$$f'_x = 3x^2y^2 + 2x - y,$$

$$f'_y = 2x^3y - x + 1.$$

Ich hodnoty v bode a sú

$$f'_x(1,2) = 12,$$

$$f'_y(1,2) = 4.$$

Prvý diferenciál funkcie f je

$$d^1 f(a,h,k) = 12h + 4k.$$

Spolu s druhým diferenciálom z príkladu 5 a hodnotou $f(a) = 6$ je

$$T^2 f(a,h,k) = 6 + 12h + 4k + 13h^2 + 11hk + k^2.$$

Pristavme sa pri geometrickej interpretácii polynómu $T^2 f$. Rovnica

$$z - z_0 = d^1 f(a, x - x_0, y - y_0)$$

je rovnicou dotykovej roviny v bode $a = [x_0, y_0]$. V inej podobe má táto rovnica tvar

$$z = f(a) + d^1 f(a, x - x_0, y - y_0).$$

Dotyková rovina je najlepšou lokálnou aproximáciou funkcie f v okolí bodu a spomedzi všetkých rovín.

Rovnica

$$z = f(a) + d^1 f(a, x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(a, x - x_0, y - y_0)$$

je rovnicou kvadratickej funkcie (paraboloidu), ktorá je najlepšou aproximáciou danej funkcie v okolí bodu a zo všetkých možných kvadratických aproximácií.

Môžeme si predstaviť, že ku grafu funkcie sme v danom bode priložili optimálny „dotykový" paraboloid. Zakrivenie paraboloidu je určené práve druhým diferenciálom.

Pojem najlepšia aproximácia nebudeme presne definovať, skúsme namiesto toho porovnať hodnoty funkcie f a jej Taylorovho polynómu $T^2 f$ v bode blízkom ku bodu a.

Príklad 7. Vráťme sa ku funkcii

$$f(x, y) = x^3 y^2 + x^2 - xy + y + 1$$

z príkladu 6 a jej Taylorovmu polynómu

$$T^2 f(a, h, k) = 6 + 12h + 4k + 13h^2 + 11hk + k^2$$

v bode $a = [1, 2]$.

Vezmime bod $b = [1.1, 1.9]$ a počítajme

$$f(1.1, 1.9) = 6,82491.$$

A teraz pre $h = 1.1 - 1$, $k = 1.9 - 2$ počítajme

$$T^2 f(a, 0.1, -0.1) = 6,83.$$

Rozdiel hodnôt je rádovo 10^{-3}.

Môžete skúsiť porovnať hodnoty v inom blízkom bode a tiež overiť, že rozdiel medzi funkčnou hodnotou f a hodnotou $T^2 f$ v bode „vzdialenom" od bodu a môže byť veľký. (Preto hovoríme o lokálnej aproximácii.)