# Prednáška 4.

Každý, kto sa nedokáže vyrovnať s matematikou, nie je úplne človek. V najlepšom prípade je to znesiteľný tvor, ktorý sa naučil nosiť topánky, kúpať sa a nerobiť v dome neporiadok.

(Robert A. Heinlein sci-fi autor, 1907-1988)

Trochu drsné, ale ako sci-fi sa to snáď dá tolerovať...

## Derivácia v smere a gradient.

V predchádzajúcej časti (prednáške) sme hovorili o parciálnych deriváciách funkcie viacerých premenných. V prípade funkcie dvoch premenných $x$ a $y$, sme si predstavovali graf funkcie ako plochu v trojrozmernom priestore, a parciálne derivácie boli smernice dotyčníc ku rezom v smere súradných osí vo zvolenom bode.

Predstavme si zvlnenú krajinu, v ktorej stojíme v bode so súradnicami $[x_0, y_0, z_0]$, pričom tretia súradnica $z_0$ je nadmorská výška, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Pri pohybe smerom na východ je meranie nadmorskej výšky na našej ceste parciálnou funkciou v premennej $x$, pričom premenná $y$ sa nemení, $y = y_0$. Nadmorská výška, v závislosti od našej polohy, je teda popísaná ako funkcia jednej premennej $f(x, y_0)$. Derivácia tejto funkcie (ktorá popisuje okamžité zmeny nadmorskej výšky v smere pohybu pri rastúcom $x$), je parciálna derivácia podľa premennej $x$. O chvíľu ju nazveme deriváciou v smere osi $x$.

Podobne sme hovorili aj o parciálnej derivácii podľa premennej $y$.

Ak vynecháme tretiu súradnicu, bod $[x_0, y_0]$ je bodom v definičnom obore funkcie $f$. Z neho sa vieme pohnúť nielen v smere osi $x$ a osi $y$ (na východ a na sever), ale môžeme si vybrať z nekonečného počtu rôznych smerov.

Každý smer je jednoznačne určený vektorom dĺžky jedna umiestneným v počiatku súradnej sústavy. Tento vektor vieme popísať pomocou uhla $\alpha$, ktorý zviera s kladnou časťou osi $x$. Nazvime ho $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Poznamenajme, že pre zovšeobecnenie do priestorov $R^n$ s počtom rozmerov $n \geq 3$ je výhodnejšie povedať, že $\sin\alpha$ vyjadríme ako $\cos\beta$, kde $\beta$ je uhol, ktorý zviera vektor $\vec{e}$ s kladnou časťou osi $y$, pričom $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

*Nakreslite si obrázok a skontrolujte v ňom.*

Ak sa v rovine pohybujeme z bodu $[x_0, y_0]$ v smere vektora $\vec{e}$, pohybujeme sa po priamke $(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\sin\alpha)$ pri $t \in R$. Pohyb prenesieme na graf funkcie a dostaneme $f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$. To je ale funkcia jednej premennej $t$.

Jej deriváciu (v bode $t_0 = 0$) nazveme deriváciou v smere $\vec{e}$.

**Definícia.** Nech $f : A \subset R^2 \to R$ a $[x_0, y_0] \in A$. Nech $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Ak existuje konečná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t},$$

tak jej hodnotu nazývame derivácia funkcie $f$ v smere $\vec{e}$ v bode $[x_0, y_0]$.

Značíme $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0)$, alebo $f'_{\vec{e}}(x_0, y_0)$.

**Príklad 1.**

a, Vypočítajme deriváciu funkcie

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

v smere danom vektorom $\vec{u}=(1,1)$ v bode $[0,0]$.

b, Vypočítajme deriváciu funkcie $f$ v ľubovoľnom smere.

**Riešenie.**

a, Vektor $\vec{u}$ nie je jednotkový. Jeho dĺžka je $||\vec{u}||=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Jednotkový vektor s rovnakým smerom je vektor $\vec{e}=\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{4})$.

Preto

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\frac{\pi}{4},t\sin\frac{\pi}{4})-f(0,0)}{t}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+t^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}-0}{t}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}.$$

b,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3\cos\alpha^3+t^3\sin\alpha^3}-0}{t}=\sqrt[3]{\cos\alpha^3+\sin\alpha^3}.$$

Počítať deriváciu v smere priamo z definície je trochu zdĺhavé. Ak je funkcia $f$ diferencovateľná, vieme výpočet zjednodušiť.

Počítajme limitu z definície derivácie v smere nasledovne:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0+t\sin\alpha)}{t}+\\
&\quad+\frac{f(x_0,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0+t\sin\alpha)}{t\cos\alpha}\cos\alpha+\\
&\quad+\frac{f(x_0,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t\sin\alpha}\sin\alpha=\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Výsledok hovorí, že deriváciu v smere vieme počítať pomocou parciálnych derivácií a zložiek smerového vektora. Všimnime si, že posledný vzťah vieme čítať, ako skalárny súčin dvoch vektorov:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)\,.$$

Prvý z vektorov nazývame gradient.

**Definícia.** Nech je funkcia $f : A \subset R^2 \to R$ diferencovateľná v bode $[x_0, y_0] \in A$.
Vektor
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$
nazývame **gradient** funkcie $f$ v bode $[x_0, y_0]$. Značíme ho $\operatorname{grad} f$ alebo $\nabla f$.

Ak je funkcia $f : A \subset R^2 \to R$ diferencovateľná v každom bode množiny $A$, tak vieme definovať funkciu (ktorej hodnoty sú vektory) $\operatorname{grad} f : A \to R^2$.

Podľa výpočtu vyššie platí táto veta.

**Veta.** *Ak je funkcia $f : A \subset R^2 \to R$ diferencovateľná v bode $[x_0, y_0]$, tak*
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}.$$

**Príklad 2.**
Vypočítajme gradient a deriváciu funkcie
$$f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 1$$
v smere danom vektorom $\vec{u} = (3, 1)$ v bode $[2, -1]$.

**Riešenie.** Vypočítajme parciálne derivácie funkcie $f$.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) = 7.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, -1) = -4.$$
Gradient funkcie $f$ je
$$\operatorname{grad} f(2, -1) = (7, -4)$$
Jednotkový vektor v smere vektora $\vec{u}$ je vektor $\vec{e} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.
Derivácia $f$ v danom smere je
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(2, -1) = (7, -4) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{17}{\sqrt{10}}.$$

Vieme teraz povedať, že funkcia $f$ je v bode $[2, -1]$ v smere danom vektorom $\vec{u}$ rastúca.

Analogicky, ako pre funkciu dvoch premenných vieme počítať gradient a deriváciu v smere funkcie aj viacerých premenných. Skúsme bez uvedenia príslušnej teórie, riešiť nasledujúci príklad.

**Príklad 3.**
Vypočítajme gradient a deriváciu funkcie
$$f(x, y, z) = x^2yz - xy^2z^2 + z$$
v smere danom vektorom $\vec{u} = (1, 1, 1)$ v bode $[2, 1, -1]$.

**Riešenie.** Vypočítajme parciálne derivácie funkcie $f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz - y^2z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,-1) = -5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2z - 2xyz^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,-1) = -8,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2y - 2xy^2z + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(2,1,-1) = 9.$$

Gradient funkcie $f$ je

$$\operatorname{grad} f(2,1,-1) = (-5,-8,9).$$

Jednotkový vektor v smere vektora $\vec{u}$ je vektor $\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
Derivácia $f$ v smere vektora $\vec{e}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(2,1,-1) = (-5,-8,9)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

## Geometrický význam gradientu.

Geometrický význam derivácie v smere je pomerne jednoznačný, je to číslo, ktoré hovorí o raste alebo klesaní funkcie $f$ v smere vektora $\vec{e}$. Presnejšie je to smernica dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom grafu funkcie v smere danom vektorom $\vec{e}$, v danom bode $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$.

O gradiente funkcie vieme zatiaľ len, že je nástrojom na výpočet derivácie v smere. V tejto časti ukážeme ďalšie dôležité interpretácie pojmu gradient.

V predchádzajúcej časti sme definovali rovnicu dotykovej roviny ku grafu diferencovateľnej funkcie $f$ v bode $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ ako

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Ak prenesieme výraz $z - z_0$ na pravú stranu, z koeficientov pri jednotlivých premenných vieme prečítať, že normálový vektor dotykovej roviny je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right).$$

Z prvých dvoch zložiek je zrejmé, že gradient je priemetom normálového vektora do súradnej roviny $x$, $y$.

Ešte zaujímavejšiu interpretáciu gradientu dosteneme, keď si položíme otázku, v ktorom smere má funkcia $f$ maximálny rast.

Už vieme, že za predpokladu diferencovateľnosti je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0,y_0) = \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}.$$

Ak smerový vektor vyjadríme ako $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, tak hľadáme maximum nasledujúcej funkcie uhla $\alpha$.

$$g(\alpha) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Vypočítajme deriváciu (funkcie jednej premennej)

$$g'(\alpha) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Stacionárne body $g'(\alpha) = 0$ sú tie body $\alpha$, pre ktoré je

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot (-\sin\alpha, \cos\alpha) = 0.$$

Zrejme platí, že

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (-\sin\alpha, \cos\alpha) = 0.$$

Preto vektor $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ musí byť násobkom vektora $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$.

Naviac musí byť jednotkový a preto sú len dve možnosti, buď je

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|},$$

alebo

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = -\frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|}.$$

Pomocou druhej derivácie sa dá zistiť, že v prvom prípade nadobúda funkcia $g$ maximum a v druhom minimum.

To znamená, že v smere gradientu má funkcia $f$ maximálny rast.

V opačnom smere $-\operatorname{grad} f$ má funkcia $f$ minimálny rast, respektíve maximálne klesanie.

Z vlastnosti skalárneho súčinu je zrejmé, že v smeroch kolmých na smer gradientu má funkcia $f$ nulový rast.

Z definície derivácie v smere vieme prečítať aj akúsi znamienkovú vlastnosť, totiž derivácia v smere $-\vec{e}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{e})} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}.$$

Aj z tejto vlastnosti je vidieť, že ak je derivácia v smere gradientu najväčšia, tak derivácia v opačnom smere musí byť najmenšia.

Označme

$$\vec{g} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|}$$

jednotkový vektor v smere gradientu.

Priamym výpočtom zistíme veľkosť derivácie v smere gradientu

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{g}}(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|} = |\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|.$$

**Príklad 4.**

Vypočítajme gradient funkcie

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

v bode $[1,2]$.

Zistime pre daný bod $[1,2]$, v ktorom smere je derivácia $f$ maximálna, v ktorom minimálna a v ktorom nulová.

**Riešenie.**

Vypočítajme parciálne derivácie funkcie $f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 8.$$

Preto

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 4y), \qquad \operatorname{grad} f(1,2) = (2,8).$$

Funkcia $f$ má maximálny rast v smere vektora $\vec{g} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, minimálny rast v smere $-\vec{g}$ a nulový rast v kolmých smeroch $\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ a $\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

Všimnime si, že elipsy $x^2 + 2y^2 = c$ sú vrstevnicami funkcie $f$. Špeciálne elipsa $x^2 + 2y^2 = 9$ je vrstevnicou na ktorej leží bod $[1,2]$. Vektory $\vec{g}$ a $-\vec{g}$ sú „kolmé” na túto vrstevnicu funkcie $f$ (v zmysle kolmosti na dotyčnicu ku elipse v bode $[1,2]$), vektory, v ktorých má $f$ nulový rast sú smerové vektory dotyčnice elipsy v bode $[1,2]$. (*Nakreslite si obrázok.*)