Prednáška 3.

Matematika je vedou mladých. Rozmýšľanie o matematike je gymnastika mozgu, vyžadujúca pružnosť a odolnosť mladosti. (Norbert Wiener 1894 - 1964)

Využime svoju mladosť pri čítaní nasledujúceho textu...

Parciálne derivácie, diferencovateľnosť, dotyková rovina a prvý diferenciál.

Parciálne derivácie.

Kvôli lepšej geometrickej predstave budeme v tejto kapitole hovoriť o funkcii dvoch premenných. Všetky vlastnosti a pojmy sa ale dajú jednoduchým spôsobom preniesť aj na funkciu viacerých premenných. V niektorých prípadoch to v poznámkach aj urobíme.

Predstavujeme si funkciu dvoch premenných pomocou jej grafu ako zvlnenú krajinu, v ktorej stojíme v niektorom bode $[x_0, y_0, z_0]$, pričom tretia súradnica z_0 je nadmorská výška, $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Skúsme upevniť premennú y tým, že ju položíme rovnú konštante, $y = y_0$. Z funkcie $f(x, y)$ vznikne parciálna funkcia $f(x, y_0)$, v ktorej sa mení už len premenná x. Je to teda funkcia jednej premennej.

Geometricky sme na zvlnenej ploche vybrali krivku v smere osi x. Táto krivka je prienik grafu funkcie $f(x, y)$ a zvislej roviny $y = y_0$ (x a z sa menia).

Môžeme si ju predstaviť ako graf funkcie jednej premennej $f(x, y_0)$ nakreslený v rovine rovnobežnej s rovinou xz. (Na osi y ležív tejto rovine bod $[0, y_0, 0]$.) Preto niekedy hovoríme o reze funkcie $f(x, y)$ v smere osi x pri danom y_0.

Príklad 1.

Vytvorme parciálnu funkciu v premennej x funkcie

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$$

pre $y_0 = 2$.

Riešenie.

Pri $y_0 = 2$ dostaneme funkciu $f(x, 2) = 2x^2 + 6x - 4$.

Ak je parciálna funkcia $f(x, y_0)$ jednej premennej x diferencovateľná, tak jej deriváciu v bode x_0 nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x v bode $[x_0, y_0]$.

Príklad 2.

Vypočítajme parciálnu deriváciu funkcie

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$$

podľa premennej x v bode $\bar{x}_0 = [1, 2]$.

Riešenie.

Parciálnu funkciu $f(x,2) = 2x^2 + 6x - 4$ z príkladu 1 derivujeme ako funkciu jednej premennej:

$$f'(x,2) = 4x + 6.$$

Aby sme v označení rozoznali premennú, podľa ktorej derivujeme budeme v ďalšom texte značiť

$$f'_x(x,2) = 4x + 6$$

(nižšie zavedieme ešte iný druh označenia).

Hodnota derivácie v bode $\bar{x}_0 = [1,2]$ je

$$f'_x(1,2) = 10.$$

Niekedy na výpočet parciálnej derivácie nestačia elementárne pravidlá pre derivovanie, aj preto sa definícia opiera o pojem limity, analogicky ako pri derivácii funkcie jednej premennej.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$, a nech $[x_0, y_0] \in A$. Nech parciálna funkcia $f(x, y_0)$ jednej premennej x je diferencovateľná v bode x_0.

Číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x, y_0)|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

nazývame **parciálna derivácia** funkcie f podľa premennej x v bode $[x_0, y_0]$.

Poznámky.

1. Rovnako vieme zaviesť aj parciálnu deriváciu v smere osi y.
2. Ak má funkcia f parciálnu deriváciu podľa premennej x v každom bode definičného oboru A, tak funkciu $f'_x(x,y) : A \to R$ - dvoch premenných x a y - nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x.
3. Analogicky definujeme parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných aj pri väčšom počte premenných.
4. V definícii vyššie sme použili alternatívne označenie parciálnej derivácie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y).$$

5. Namiesto predpokladu, že parciálna funkcia $f(x, y_0)$ je diferencovateľná v bode x_0, sme v definícii vyššie mohli žiadať, aby existovala konečná limita, ako sme to žiadali v definícii derivácie funkcie jednej premennej.

Príklad 3.

Vypočítajme parciálne derivácie funkcie

$$f(x,y) = x^2 y + \ln(xy + 1)$$

podľa jej premenných.

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je množina

$$D_f = \{[x, y] \in R^2;\ xy > -1\}$$

Využijeme znenie Poznámky 2.

Parciálne derivácie sú funkcie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + \frac{1}{xy + 1}\, y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + \frac{1}{xy + 1}\, x.$$

Všimnime si, že hoci oba predpisy majú zmysel aj pre $xy < -1$, o parciálnych deriváciach môžeme hovoriť iba tam, kde je definovaná aj pôvodná funkcia f. Teda obe parciálne derivácie sú definované len na definičnom obore pôvodnej funkcie f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D_f \to R,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : D_f \to R.$$

Príklad 4.

Použitím definície vypočítajme parciálne derivácie funkcie

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x + y} & \text{pre } x \neq -y \\ 0 & \text{pre } x = -y, \end{cases}$$

podľa jednotlivých premenných v bode $[0, 0]$.

Riešenie.

Na začiatok poznamenajme, že ak by sme počítali napríklad

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x + y)^2} \quad ,$$

tak sme vypočítali parciálnu deriváciu v bodoch, v ktorých $x \neq -y$, a teda výsledok nevieme použiť v bode $[0, 0]$.

Preto
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.$$

Táto limita neexistuje, preto ani $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ neexistuje.

Podobne počítame

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y - 0} = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

V bode $[0, 0]$ teda $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ neexistuje a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Čitateľ si môže skúsiť vypočítať parciálne derivácie napríklad v bode $[1, -1]$.

Diferencovateľnosť a dotyková rovina.

Logicky by mal výklad v tejto časti dodržať poradie pojmov v nadpise, pretože dotykovú rovinu majú len diferencovateľné funkcie.

Dovolíme si vymeniť poradie výkladu a najprv sa naučíme zostavovať rovnicu roviny, ktorá by mohla byť za určitých okolností dotykovou rovinou ku grafu funkcie a až následne si povieme, kedy takáto rovina dotykovou je a kedy nie.

Predovšetkým si uvedomíme, že parciálne derivácie funkcie v bode $[x_0, y_0]$ sú čísla, ktoré hovoria o raste, respektíve klesaní funkcie f v smere príslušnej osi.

A aký je ich geometrický význam? Sú smernicami dotyčnice ku krivke, ktorá je rezom grafu funkcie f v smere príslušnej osi.

Ak máme vypočítané $k_1 = f'_x(x_0, y_0)$, tak dotyčnica ku rezu grafom funkcie v smere osi x v bode $[x_0, y_0, z_0]$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$ má rovnicu

$$z - z_0 = k_1(x - x_0)$$

pri konštantnej druhej súradnici $y = y_0$.

Rez grafom funkcie f aj dotyčnica k rezu ležia vo zvislej rovine rovnobežnej so súradnicovou rovinou xz.

Podobne dotyčnica ku rezu grafom funkcie v smere osi y v bode $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnicu

$$z - z_0 = k_2(y - y_0)$$

pri konštantnej prvej súradnici $x = x_0$. Pritom smernica $k_2 = f'_y(x_0, y_0)$.

V tomto prípade leží rez grafom funkcie f a dotyčnica k rezu vo zvislej rovine rovnobežnej so súradnicovou rovinou yz.

Obe dotyčnice prechádzajú bodom $[x_0, y_0, z_0]$ a sú rôznobežné. Je nimi jednoznačne určená rovina

$$z - z_0 = k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0).$$

V ďalších úvahách sa budeme pýtať, či takto zostavenú rovinu môžeme považovať za dotykovú rovinu ku grafu funkcie $f(x, y)$ v danom bode.

Najprv sa pozrime na dva príklady.

Príklad 5.

Je daná funkcia

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$$

a bod $\bar{x}_0 = [1, 2]$.

Nájdime rovnice dotyčníc ku rezom v smere oboch osí x a y v danom bode $\bar{x}_0$ a zostavme z nich rovinu.

Riešenie.

Vypočítame parciálne derivácie funkcie f podľa premenných x a y.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x - 2y.$$

Ich hodnota v bode $\bar{x}_0 = [1, 2]$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 10, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1.$$

Dotyčnica ku rezu v smere osi x je daná dvojicou rovníc

$$\begin{aligned} z - 4 &= 10(x-1), \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Dotyčnica ku rezu v smere osi y je daná dvojicou rovníc

$$\begin{aligned} z - 4 &= -1(y-2), \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Rovina určená dotyčnicami má rovnicu

$$z - 4 = 10(x-1) - (y-2).$$

(Nakreslite si obrázok)

Príklad 6.
Je daná funkcia

$$f(x,y) = |\mathrm{sgn} x||\mathrm{sgn} y|$$

a bod $\bar{x}_0 = [0,0]$.

Nájdime rovnice dotyčníc ku rezom v smere oboch osí x a y v bode $\bar{x}_0$ a zostavme z nich rovinu.

Riešenie. Pripomeňme, že funkcia f nadobúda len dve hodnoty, nulu na osiach a jednotku mimo nich.

Parciálne derivácie funkcie f počítame pomocou definície.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0.$$

Rovnica dotyčnice ku rezu v smere osi x je

$$z - 0 = 0(x - 0),$$

pri pevnej súradnici $y = 0$, teda dotyčnica je v skutočnosti os x,
a tiež rovnica dotyčnice ku rezu v smere osi y je

$$z - 0 = 0(y - 0),$$

pri pevnej súradnici $x = 0$, teda dotyčnica je os y.

Rovina určená dotyčnicami má rovnicu

$$z = 0.$$

Všimnime si, že rovina vypočítaná v príklade 6 obsahuje práve len dve dotykové priamky a všetky ostatné body na grafe funkcie majú tretiu súradnicu $z = 1$. Jednotkový rozdiel medzi funkčnou hodnotou $f(x, y) = 1$ a hodnotou v rovine $z = 0$ pritom pozorujeme aj pre také body $[x, y]$ z definičného oboru, ktoré sú k bodu $[0, 0]$ ľubovoľne blízko.

Takúto rovinu $z = 0$ nebudeme považovať za dotykovú.

Kedy teda rovinu

$$z - z_0 = k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0)$$

považovať za dotykovú, a kedy nie?

Ak rovnicu roviny prepíšeme do tvaru

$$z = z_0 + k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0),$$

tak hodnota z je tretia súradnica bodu $[x, y, z]$ ležiaceho v rovine.

Budeme žiadať, aby odchýlka hodnoty z od hodnoty $f(x, y)$ tretej súradnice bodu $[x, y, f(x, y)]$ ležiaceho na grafe funkcie f, bola veľmi malá, tým menšia, čím bližšie sme k bodu dotyku $[x_0, y_0, z_0]$, v ktorom je odchýlka nulová.

Presnejšie, aby odchýlka $f(x, y)$ od z bola zanedbateľná v porovnaní so vzdialenosťou bodu $[x, y]$ od bodu $[x_0, y_0]$, teda aby sa pomer týchto čísel zmenšoval k nule pri blížení sa k bodu $[x_0, y_0]$.*(V definícii túto požiadavku formalizujeme pomocou limity.)*

Ak bude vyššie uvedená podmienka splnená, budeme funkciu nazývať diferencovateľná v bode $[x_0, y_0]$, a rovinu

$$z - z_0 = k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0)$$

nazveme dotykovou.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$, nech $[x_0, y_0] \in A$ a nech $k_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $k_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Hovoríme, že funkcia f je **diferencovateľná** v bode $[x_0, y_0]$, ak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \big(f(x_0, y_0) + k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0)\big)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Definícia. Ak $f : A \subseteq R^2 \to R$ je diferencovateľná funkcia, tak rovnica

$$z - z_0 = k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0),$$

v ktorej

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad k_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad k_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

je **rovnica dotykovej roviny** ku grafu funkcie f v bode $[x_0, y_0, z_0]$.

Výraz

$$df(\bar{x}, \bar{x}_0) = k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0)$$

nazývame **1. diferenciál** funkcie f v bode $\bar{x}_0 = [x_0, y_0]$.

Posledný zápis je použiteľný pre funkcie n premenných. Špeciálne pre $n = 2$ môžeme použiť aj zápis

$$df(\bar{x}, \bar{x}_0) = df(x, y, x_0, y_0).$$

Je zrejmé, že na to, aby funkcia mohla byť diferencovateľná (mať dotykovú rovinu), musí mať parciálne derivácie.

V príklade 6 sme videli, že to ešte nestačí. Naozaj

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\mathrm{sgn} x||\mathrm{sgn} y| - 0 - 0(x-0) - 0(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\mathrm{sgn} x||\mathrm{sgn} y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pri zúžení na krivku $\varphi(t) = (t, t)$ dostaneme limitu

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}|t|} = \infty,$$

a teda výsledok limity vyššie nemôže byť nula.

Aby sme nemuseli v každom prípade počítať relatívne zložitú limitu, uvedieme dve vety, ktoré nebudeme dokazovať.

Veta. *Ak má funkcia $f : A \subseteq R^2 \to R$ spojité parciálne derivácie v bode $[x_0, y_0]$, tak je v danom bode aj diferencovateľná. (A teda má v danom bode dotykovú rovinu a prvý diferenciál.)*

Veta. *Ak je funkcia $f : A \subseteq R^2 \to R$ v bode $[x_0, y_0]$ diferencovateľná, tak je v tomto bode aj spojitá.*

Prvá veta nám poskytuje pozitívne kritérium. Ak vieme vypočítať parciálne derivácie pomocou pravidiel pre derivovanie, a výsledky sú spojité (elementárne) funkcie, tak vieme, že funkcia je diferencovateľná, nemusíme použiť overenie limitou z definície.

Druhá veta ponúka negatívne kritérium, ak funkcia nie je v bode dotyku spojitá, nemôže byť ani diferencovateľná a zasa netreba použiť postup pomocou definície.

Na záver tejto časti uvedieme ešte tri príklady.

Príklad 7.

Je daná funkcia

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$$

a bod $\bar{x}_0 = [3, -4]$.

Zistime, či je funkcia v danom bode $\bar{x}_0$ diferencovateľná a ak áno, napíšme rovnicu dotykovej roviny a 1. diferenciál v bode $\bar{x}_0$.

Riešenie.

Parciálne derivácie funkcie f podľa jednotlivých premenných sú

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x.$$

Ľahko vidíme, že parciálne derivácie sú spojité funkcie vo všetkých bodoch rôznych od bodu $[0,0]$, a teda aj v bode $\bar{x}_0$.

Vypočítame hodnoty

$$z_0 = f(3,4) = 17,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,-4) = \frac{3}{5} + 4 = \frac{23}{5},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,-4) = -\frac{4}{5} - 3 = -\frac{19}{5}.$$

Funkcia je v bode $[3,-4]$ diferencovateľná, jej dotyková rovina má rovnicu

$$z - 17 = \frac{23}{5}(x-3) - \frac{19}{5}(y+4).$$

Výraz na pravej strane rovnice dotykovej roviny

$$df(x,y,3,-4) = \frac{23}{5}(x-3) - \frac{19}{5}(y+4)$$

je prvý diferenciál funkcie f v bode $\bar{x}_0 = [3,-4]$.

Príklad 8.

Je daná funkcia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pre } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pre } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

a bod $\bar{x}_0 = [0,0]$.

Zistime, či je funkcia v danom bode $\bar{x}_0$ diferencovateľná a ak áno, napíšme rovnicu dotykovej roviny a 1. diferenciál v bode $\bar{x}_0$.

Riešenie.

Parciálne derivácie funkcie f podľa jednotlivých premenných počítame pomocou definície:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$

Diferencovateľnosť funkcie v bode $[0,0]$ musíme zistiť pomocou definície. Počítame

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 - 0(x-0) - 0(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ak v poslednej limite použijeme zúženie na krivku $\varphi(t) = (t,t)$, dostaneme limitu

$$\lim_{t\to 0+} \frac{t^3}{2\sqrt{2}t^3} = \frac{1}{\sqrt{8}} \neq 0,$$

a teda výsledok pôvodnej limity nemôže byť nula.

Funkcia nie je v bode $[0,0]$ diferencovateľná, nemá dotykovú rovinu.

Príklad 9.

Je daná funkcia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pre } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

a bod $\bar{x}_0 = [0,0]$.

Zistime, či je funkcia v danom bode $\bar{x}_0$ diferencovateľná a ak áno, napíšme rovnicu dotykovej roviny a 1. diferenciál v bode $\bar{x}_0$.

Riešenie.

Parciálne derivácie funkcie f podľa jednotlivých premenných počítame opäť pomocou definície:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Diferencovateľnosť funkcie v bode $[0,0]$ musíme zistiť pomocou definície. Počítame

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 - 0(x-0) - 0(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}} (xy)^{\frac{1}{2}}.$$

V poslednej limite je činiteľ $\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ ohraničená funkcia (*čím?*) a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (xy)^{\frac{1}{2}} = 0$. Preto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}} (xy)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Funkcia je v bode $[0,0]$ diferencovateľná, jej dotyková rovina je

$$z = 0.$$

Jej 1. diferenciál v bode $\bar{x}_0$ je

$$df(x,y,0,0) = 0.$$