Prednáška 11.

Matematika je jediný naozaj zaručený spôsob, ako sa zblázniť.

Albert Einstein 1879 - 1955

Aplikácie dvojného integrálu.

V tomto texte ukážeme niekoľko situácií, v ktorých sa môžeme stretnúť s použitím dvojného integrálu.

1. Objem telesa.

Už pri definícii dvojného integrálu sme použili motiváciu založenú na výpočte objemu.

Majme integrovateľné funkcie $f : A \to R$, $g : A \to R$ a predpokladajme, že $g(x,y) \leq f(x,y)$. Objem telesa $T \subset R^3$ tvoreného bodmi $[x,y,z]$, pre ktoré je $[x,y] \in A$ a $g(x,y) \leq z \leq f(x,y)$ (pre lepšiu predstavu ide o valcové teleso zhora aj zdola ohraničené „krivými" plochami), vypočítame ako

$$\iint_A f(x,y) - g(x,y)\, dxdy.$$

Príklad 1. Vypočítajme objem kužeľa

$$x^2 + y^2 \leq z^2$$

ak $0 \leq z \leq h$.

Riešenie.

Priemetom kužeľa do roviny x, y je kruh so stredom v počiatku a polomerom h. To je pre nás množina A. Ak vyjadríme z pomocou x, y dostaneme

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Graf funkcie $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ohraničuje teleso zdola. Horné ohraničenie je dané konštantnou funkciou, $f(x,y) = h$. Preto objem vypočítame ako

$$\iint_A h - \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Popíšeme kruh A ako elementárnu oblasť typu φr.

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$
$$0 \leq r \leq h.$$

Teraz

$$\iint_A h - \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^h (h-r)r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[h\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^h d\varphi = 2\pi\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Výsledok môžete nájsť v každej stredoškolskej učebnici matematiky (no dobre, v každej nie).

2. Obsah oblasti.

Ak $A \subset R^2$ je merateľná množina, tak jej miera je

$$\iint_A 1\,dxdy.$$

Príklad 2. Vypočítajme obsah oblasti ohraničenej Bernoulliho lemniskátou

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

Riešenie. Ako vyzerá lemniskáta si môžete nájsť napríklad vo wikipédii alebo vykresliť nejakým programom.

Popíšeme ju ako elementárnu oblasť typu φr.

Po použití polárnych súradníc dostaneme rovnicu krivky v podobe

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Aby mohla byť rovnosť splnená, musí byť $\cos^2\varphi \geq \sin^2\varphi$.

To je práve vtedy, keď $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ alebo $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. Pretože lemniskáta je symetrická podľa osi y (aj x, ale túto symetriu nevyužijeme), budeme počítať len obsah jej pravej polovice. Vtedy

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$
$$0 \leq r \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Predpokladáme, že $a > 0$.

(*Hornú hranicu v druhej nerovnosti sme dostali zo vzťahu* $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$. *Pripomeňme, že* $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$.)

Teraz

$$\iint\limits_A 1\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = a^2\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Celý obsah je dvojnásobný, teda $2a^2$.

3. Obsah krivej plochy.

Majme diferencovateľnú funkciu $f : A \to R$ a označme jej graf ako G_f. Budeme počítať veľkosť zvlnenej plochy grafu.

Ak uvažujeme bod na grafe so súradnicami $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, tak môžeme vypočítať smerové vektory dotyčníc ku grafu funkcie v danom bode. Smerový vektor dotyčnice v smere osi x je $(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$ a v smere osi y je $(0, 1, f'_y(x_0, y_0))$. Element veľkosti plochy dostaneme ako veľkosť vektorového súčinu, keď každý vektor násobíme prírastkom v smere danej osi.

$$\begin{aligned} &\left|(dx, 0, f'_x(x_0, y_0)dx) \times (0, dy, f'_y(x_0, y_0)dy)\right| = \\ &\qquad = \left|(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)\right| dxdy. \end{aligned}$$

Samotný vektor

$$(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$$

je vektor kolmý na dotykovú rovinu ku grafu funkcie v bode $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ a jeho veľkosť

$$\sqrt{{f'_x}^2(x_0, y_0) + {f'_y}^2(x_0, y_0) + 1}$$

je veľkosťou plochy rovnobežníka so stranami tvorenými vektormi $(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$ a $(0, 1, f'_y(x_0, y_0))$.

Preto pre obsah plochy grafu G_f máme vzťah

$$m(G_f) = \iint_A \sqrt{{f'_x}^2(x, y) + {f'_y}^2(x, y) + 1}\, dxdy.$$

Príklad 3. Vypočítajme obsah plochy popísanej ako graf funkcie $f(x, y) = x^2 - y^2$ s definičným oborom A daným nerovnosťou $x^2 + y^2 \leq 1$.

Riešenie.

Popíšeme kruh A ako elementárnu oblasť typu $r\varphi$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Teraz použijeme vzorec pre obsah plochy grafu funkcie f najprv v premenných x, y a potom urobíme substitúciu do polárnych súradníc.

$$\begin{aligned} &\iint\limits_A \sqrt{{f'_x}^2(x, y) + {f'_y}^2(x, y) + 1}\, dxdy = \iint\limits_A \sqrt{(2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dxdy = \\ &\qquad = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr. \end{aligned}$$

Ďalej použijeme substitúciu $t = 4r^2 + 1$, $dt = 8r\, dr$.

$$\begin{aligned} &2\pi \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{t}\, dt = \\ &\qquad = \frac{2\pi}{12} \left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

Po dokončení výpočtu sa môžeme pozrieť, či je výsledok v zhode s očakávaním. Veľkosť plochy musí byť kladná. A naviac plocha grafu funkcie musí byť väčšia ako miera definičného oboru A. V našom prípade je A kruh s plochou π. Preto výsledok je v zhode s naším očakávaním.

Najmenšiu veľkosť má graf konštantnej funkcie. Dosaďte do vzorca pre výpočet obsahu konštantnú funkciu a výsledok porovnajte so vzorcom z predošlej časti.

4. Statické momenty a ťažisko.

Predstavme si nehomogénnu plochú dosku tvaru oblasti A s plošnou hustotou $f(x,y)$. (Túto predstavu chápeme ako idealizáciu tenkej dosky konštantnej hrúbky.) Jej hmotnosť je

$$m = \iint_A f(x,y)\,dxdy.$$

Statické momenty vzhľadom na súradné osi x respektíve y, sú

$$M_x = \iint_A y\,f(x,y)\,dxdy \qquad\qquad M_y = \iint_A x\,f(x,y)\,dxdy.$$

Súradnice ťažiska $[t_x, t_y]$ dostaneme ako

$$t_x = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_A x\,f(x,y)\,dxdy}{\iint_A f(x,y)\,dxdy}, \qquad\qquad t_y = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_A y\,f(x,y)\,dxdy}{\iint_A f(x,y)\,dxdy}.$$

Príklad 4. Vypočítajme statické momenty a ťažisko oblasti A ohraničenej krivkami $y^2 = x$ a $y = 8x^2$, ak hustota je daná funkciou $f(x,y) = 1 - xy$.

Riešenie. Množina A je ohraničená dvoma parabolami.

x-ové súradnice ich priesečníkov vypočítame z rovnice

$$x = 64x^4.$$

Korene sú $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{1}{4}$.

Preto popis elementárnej oblasti typu xy je

$$0 \le x \le \frac{1}{4},$$
$$8x^2 \le y \le \sqrt{x}.$$

Hmotnosť je

$$\begin{aligned} m &= \iint_A 1 - xy\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\int_{8x^2}^{\sqrt{x}} 1 - xy\,dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} \left[y - \frac{1}{2}xy^2 \right]_{8x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} - 8x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 32x^5\,dx = \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{32}{6}x^6 \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{31}{768}. \end{aligned}$$

Statický moment vzhľadom na súradnú os x je

$$
\begin{aligned}
M_x &= \iint_A y(1-xy)\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\int_{8x^2}^{\sqrt{x}} y - xy^2\,dy \right) dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3}xy^3 \right]_{8x^2}^{\sqrt{x}} dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3} - 32x^4 + \frac{512x^7}{3}\,dx = \frac{321}{35 \cdot 2^{10}}.
\end{aligned}
$$

Druhá súradnica ťažiska t_y je

$$t_y = \frac{M_x}{m} = 0.22$$

Statický moment M_y vzhľadom na os y a súradnica ťažiska t_x sa počítajú analogicky.

5. Momenty zotrvačnosti.

Uvažujeme o rovnakej nehomogénnej plochej doske tvaru oblasti A s plošnou hustotou $f(x,y)$ ako v časti 4 a predstavujeme si jej rotáciu okolo súradnej osi O_x respektíve osi O_y. Momenty zotrvačnosti dosky sú

$$
\begin{aligned}
I_x &= \iint_A y^2\, f(x,y)\,dxdy, \\
I_y &= \iint_A x^2\, f(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}
$$

Ak si predstavujeme rotáciu dosky okolo počiatku súradnej sústavy (čo je vlastne rotácia okolo osi O_z) tak príslušný moment zotrvačnosti je

$$I_o = \iint_A (x^2+y^2)\, f(x,y)\,dxdy.$$

Príklad 5. Vypočítajme moment zotrvačnosti homogénnej oblasti A s jednotkovou hustotou pri rotácii okolo počiatku, ak A je oblasť ohraničená krivkou $x^2+y^2=2x$.

Riešenie.
Po doplnení na štvorec dostaneme

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Popíšeme kruh A ako elementárnu oblasť typu φr.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\
0 \le r \le 2\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Použitím vzorca a transformáciou do polárnych súradníc dostaneme

$$
\begin{aligned}
I_o &= \iint_A (x^2+y^2)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} r^3\,dr\,d\varphi = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

(Opäť sme použili identitu $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$ *a to dvakrát, pre odstránenie vyšších mocnín funkcie kosínus).*