Prednáška 10.

Matematika je ako hra dáma, vhodná pre mládež, nie príliš obtiažna, zábavná a neohrozuje štát. (Platón 427 - 347 BC)

Substitúcia v dvojnom integráli.

Tak, ako sme používali substitúciu v určitom integráli, skúsime podobnú myšlienku použiť aj pre dvojný integrál. Špeciálne si spomeňme na ten typ substitúcie, kedy sme „starú" premennú x nahradili funkciou $\varphi(t)$ „novej" premennej t. Väčšinou sme si potrebovali poradiť s nepríjemnou funkciou, ktorú sme integrovali.

Na rozdiel od určitého integrálu, v dvojnom integráli pôjde pri substitúcii o úlohu poradiť si s nepríjemnou merateľnou množinou, na ktorej dvojný integrál počítame.

Po všeobecnom úvode sa zameriame na jeden konkrétny typ substitúcie, slúžiaci na výpočet integrálu z funkcie definovanej na kruhu, alebo jeho časti.

Všeobecný úvod.

Predstavme si rovinu so súradnicovými osami x, y a v nej štvorčekovú sieť so štvorčekmi veľkosti 1×1.

„Natiahnime" rovinu v smere vodorovnej osi dvakrát a v zvislom smere trikrát (bod [0,0] zostáva na mieste). Nakreslime si novú rovinu so súradnicami u, v,

$$u = 2x, \qquad v = 3y.$$

Ako vyzerá naša, pôvodne štvorčeková sieť po natiahnutí?

V novom obrázku sa zmenila na obdĺžnikovú sieť s obdĺžnikmi veľkosti 2×3. Každý štvorec s veľkosťou 1 sa natiahol na obdĺžnik s veľkosťou 6.

Ak budeme počítať plochu jednotkového štvorca v rovine x, y a porovnáme výsledok s plochou obdĺžnika, na ktorý sa natiahol, dostaneme vzťah

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} 1\, dxdy = \frac{1}{6} \iint\limits_{[0,2]\times[0,3]} 1\, dudv,$$

alebo inak

$$\int_0^1 \int_0^1 1\, dy\, dx = \frac{1}{6} \int_0^2 \int_0^3 1\, dv\, du.$$

Sama sa ponúka analógia s určitým integrálom funkcie jednej premennej s nahradením

$$dx = \frac{1}{2} du, \qquad dy = \frac{1}{3} dv,$$

alebo

$$dx\,dy = \frac{1}{6} du\,dv.$$

Priam sa žiada povedať, že to je vlastne všetko. Ale...

V našom príklade sa rovina x, y natiahla rovnomerne v každom bode. Čo ak bude koeficient natiahnutia závisieť od miesta v rovine?

Súradnica x závisela len od novej súradnice u a podobne y záviselo len od v. Čo ak natiahnutie bude meniť svoj smer a stará súradnica x (a rovnako y) bude vyjadrená pomocou oboch súradníc u aj v?

Najvšeobecnejšie vyjadrená závislosť medzi starými a novými súradnicami má podobu

$$\begin{aligned} x =& \phi_1(u, v), \\ y =& \phi_2(u, v). \end{aligned}$$

Tie isté vzťahy napíšeme v podobe prírastkov (diferenciálov)

$$\begin{aligned} dx =& \frac{\partial \phi_1}{\partial u}\, du + \frac{\partial \phi_1}{\partial v}\, dv, \\ dy =& \frac{\partial \phi_2}{\partial u}\, du + \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\, dv. \end{aligned}$$

Ak si pod dx predstavíme prírastok v smere osi x, vieme ho zapísať v podobe vektora $(dx, 0)$. (Druhá zložka 0 znamená žiaden prírastok v smere osi y.)

Podobne prírastok v smere osi y je $(0, dy)$.

V nových súradniciach u, v sú obrazmi prírastkov vektory

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}\, du, \frac{\partial \phi_1}{\partial v}\, dv\right) \qquad \text{a} \qquad \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\, du, \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\, dv\right).$$

Ak teraz vyjadríme tú istú plochu v starých aj nových súradniciach pomocou vektorového súčinu, dostaneme

$$|(dx, 0) \times (0, dy)| = \left| \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}\, du, \frac{\partial \phi_1}{\partial v}\, dv\right) \times \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\, du, \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\, dv\right) \right|.$$

A po výpočte vektorových súčinov (*pripomeňme, že* $(a, b) \times (c, d) = ad - bc$,)

$$dxdy = \left| \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial \phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \right) \right| dudv.$$

Výraz na pravej strane rovnosti sa dá zapísať aj ako absolútna hodnota determinantu matice veľkosti 2x2.

$$dxdy = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \right| dudv.$$

Veľkosť determinantu v poslednej rovnosti je číslo, ktoré udáva koeficient lokálneho natiahnutia plochy v každom mieste roviny u, v.

Dterminant samotný voláme ho Jacobiho determinant alebo skrátene Jakobián a značíme $J(u,v)$.

Vo vysvetľovaní sme zatiaľ nepovedali, že funkcie ϕ_1, ϕ_2 sú diferencovateľné.

A tiež, že predpokladáme, že žiadna plocha sa nezmenšila na nulovú, čo vyjadríme požiadavkou, aby determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

bol skoro všade nenulový. (*Termínom skoro všade rozumieme, že môže byť nulový len na množine miery nula, napr. v jednom bode.*)

Teraz vieme sformulovať všeobecnú vetu o substitúcii.

Veta (o substitúcii). *Nech $f : A \to R$ je integrovateľná funkcia definovaná na merateľnej množine A.*

Nech funkcie $\phi_1 : B \to R$, $\phi_2 : B \to R$ sú diferencovateľné a nech ich Jacobiho determinant

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

je nenulový skoro všade.

Označme $\tilde{f}(u,v) = f(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$.

Potom

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B \tilde{f}(u,v)|J(u,v)|\,dudv.$$

Pritom $B \subset R^2$ je taká množina, že zobrazenie $(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$ zobrazuje množinu B na množinu A.

Veta je riadne dlhá, ale keď sa nad ňou zamyslíme, tak hovorí toto:

Prejdime od premenných x, y k novým premenným u, v. Vyjadrime pomocou nich funkciu f a jej definičný obor v nových premenných nazveme B.

Namiesto dvojného integrálu na množine A počítame dvojný integrál v nových súradniciach na množine B. Pritom berieme do úvahy lokálnu deformáciu veľkostí plôch danú koeficientom $|J(u,v)|$.

Procesom substitúcie chceme dosiahnuť, aby popis oblasti B bol jednoduchý a dala sa použiť Fubiniho veta.

Polárne súradnice.

Našim hlavným cieľom je ukázať použitie vety o substitúcii v jedinom špeciálnom prípade substitúcie do polárnych súradníc.

V tejto časti pripomenieme, ako vyzerajú polárne súradnice.

Zrejme sme sa už s nimi stretli, napríklad pri goniometrickom tvare komplexného čísla.

„Klasické” kartézske alebo inak pravouhlé súradnice udávajú polohu bodu A ako dvojicu čísel $[x, y]$. Tieto čísla znamenajú, voľne povedané, vodorovnú resp. zvislú vzdialenosť bodu A od počiatku súradnej sústavy $O = [0, 0]$, doplnenú znamienkom.

Polárne súradnice udávajú polohu bodu A pomocou dvojice $[r, \varphi]$, vzdialenosti r od počiatku O a uhla φ, ktorý zviera úsečka OA s kladnou časťou osi x.

V týchto súradniciach je r skutočná vzdialenosť, preto $r \in [0, \infty)$.

Uhol φ je z intervalu dĺžky 2π, najčastejšie sa uvažuje $\varphi \in [0, 2\pi)$ alebo $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Prechod od polárnych súradníc ku kartézskym je daný vzťahmi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Príklad. Popíšme polkruh M určený nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$ ako elementárnu oblasť použitím polárnych súradníc.

Riešenie. Podľa vzťahov vyššie je

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2.$$

Preto

$$r^2 \leq 9, \qquad \text{teda } \ r \leq 3.$$

Aby $x \geq 0$, musí byť uhol φ z rozsahu

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Množina M je popísaná nerovnosťami

$$\begin{aligned} 0 \leq r &\leq 3, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi &\leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Polkruhu v súradniciach x, y zodpovedá obdĺžnik v súradniciach r, φ.

Bez toho, aby sme formálne definovali, budeme hovoriť o elementárnej oblasti typu $r\varphi$.

(*Predstave pomôže obrázok. Nakreslite si ho.*)

Na záver sa ešte pozrime, ako sa menia veľkosti plôch pri substitúcii do polárnych súradníc.

Ak označíme

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \varphi) &= r\cos\varphi \\ \phi_2(r, \varphi) &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

tak

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_1}{\partial r}(r, \varphi) &= \cos\varphi, & \frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi}(r, \varphi) &= -r\sin\varphi, \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial r}(r, \varphi) &= \sin\varphi, & \frac{\partial\phi_2}{\partial\varphi}(r, \varphi) &= r\cos\varphi. \end{aligned}$$

Preto

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Koeficient veľkosti zmeny obsahu - veľkosť Jakobiánu - závisí len od vzdialenosti r od počiatku.

Všimnime si tiež, že Jakobián substitúcie do polárnych súradníc je nenulový všade okrem bodu $O = [0,0]$.

Substitúcia do polárnych súradníc.

Veta.

Nech $f : A \to R$ je integrovateľná funkcia definovaná na merateľnej množine A. Nech A je obrazom množiny B pri transformácii pomocou polárnych súradníc. Potom

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi.$$

Poznamenáme, že pri označení $\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ dostaneme základné tvrdenie vety v ešte stručnejšej podobe

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B \tilde{f}(r,\varphi)\,r\,drd\varphi.$$

Tiež poznamenajme, že množina B je množina tých bodov $[r,\varphi]$ v súradnej rovine r, ϕ, pre ktoré je $[r\cos\varphi, r\sin\varphi] \in A$ (*v súradnej rovine x, y.)*

Vo zvyšku tejto časti uvedieme niekoľko príkladov, v ktorých je užitočné použiť substitúciu do polárnych súradníc.

Príklad 1. Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

ak množina M je kruh $x^2 + y^2 \leq 4$.

Riešenie.

Popísať kruh M ako elementárnu oblasť typu $r\varphi$ je naozaj elementárne. Stačí si uvedomiť, že polomer $r \leq 2$ a uhol φ je ľubovoľný (*Nakreslite.*)

Preto

$$0 \leq r \leq 2,$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Teraz

$$\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_B \sqrt{r^2}\,r\,drd\varphi.$$

(*Nezabudnite na Jakobián...*)
A ďalej

$$\iint\limits_B r^2\, dr d\varphi = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^2 \left(r^2 [\varphi]_0^{2\pi} \right) dr = \int_0^2 2\pi r^2\, dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}\,\pi.$$

Príklad 2. Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M x\, dx dy$$

ak množina M je daná nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $x \leq y$.

Riešenie.

Premyslime si, že prvou nerovnosťou je určený kruh o polomere 1, druhou pravá polrovina a treťou polrovina nad priamkou $y = x$. (*Nakreslite.*)

Ak sa pokúsime množinu M vyšrafovať úsečkami vychádzajúcimi z počiatku zistíme, že každá úsečka má dĺžku 1 (polomer kruhu). Krajné úsečky ležia na priamkach $y = x$ a $x = 0$. Preto uhol φ sa mení od $\frac{\pi}{4}$ po $\frac{\pi}{2}$.

A teda popis elementárnej oblasti typu r, φ je

$$0 \leq r \leq 1,$$
$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

K nerovnostiam sa dá dospieť aj bez obrázka, ale pri nenázornom postupe ľahšie urobíme chybu.

(*Výpočet by vyzeral nejako takto: Dosaďme do zadaných nerovností za x a y*

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Dostaneme postupne $r^2 \leq 1$, $\;r\cos\varphi \geq 0$, $\;r\cos\varphi \leq r\sin\varphi$.

Z prvej nerovnosti je	$r \leq 1,$
z druhej	$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$
a z tretej	$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$

Spojením druhej a tretej nerovnosti máme ohraničenie pre φ.)

Teraz

$$\iint\limits_M x\,dxdy = \iint\limits_B r\cos\varphi\, r\,drd\varphi.$$

$$\iint\limits_B r^2\cos\varphi\,drd\varphi = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\varphi\,d\varphi\right)dr = \int_0^1 \left(r^2[\sin\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)dr =$$

$$= \int_0^1 (1-\frac{1}{\sqrt{2}})r^2\,dr = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

Príklad 3. Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

ak množina M je kruh $x^2+y^2 \le 2x$.

Riešenie. Doplnením do úplného štvorca dostaneme nerovnosť

$$x^2-2x+1+y^2 \le 1,$$

teda

$$(x-1)^2+y^2 \le 1,$$

čo je nerovnosť kruhu o polomere 1 so stredom v bode $S=[1,0]$. (*Nakreslite.*)

Posunutý kruh šrafujeme úsečkami z počiatku $O=[0,0]$ (nie z jeho stredu). Úsečky majú rôznu dĺžku. Aby sme vošli dovnútra kruhu, musí byť

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Ohraničenie pre r získame dosadením do nerovnosti kruhu

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \le 2r\cos\varphi.$$

Po úprave

$$r \le 2\cos\varphi.$$

Pretože horné ohraničenie pre premennú r závisí od premennej φ, popis

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$
$$0 \le r \le 2\cos\varphi,$$

je popisom elementárnej oblasti typu φr.

Preto

$$\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi.$$

Po substitúcii $t = \sin\varphi$ v určitom integráli (funkcie jednej premennej), dostaneme

$$\int_{-1}^{1} \frac{8}{3}(1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}\left[t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{32}{9}.$$

Príklad 4. Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy$$

ak množina M je ohraničená nerovnosťami $1 \le x^2+y^2 \le 9$, $y \le \sqrt{3}x$, $y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Riešenie. Po nakreslení dvoch kružníc a dvoch priamok dostávame na obrázku výseč medzikružia. (*Nakreslite.*)

Smernica jednej priamky je $\sqrt{3}$, čo je tg $\frac{\pi}{3}$, smernica druhej je $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

Preto dvojica nerovností

$$\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$
$$1 \le r \le 3,$$

je popisom elementárnej oblasti. (Typu $r\varphi$ alebo φr.)

Po substitúcii do dvojného integrálu máme

$$\iint\limits_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}\right)\cdot r\,dr \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 \varphi\, r\,dr \right) d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^3 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\varphi\,d\varphi = 4\left[\frac{\varphi^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Vo vypočítaných príkladoch sme mohli pozorovať, že substitúcia pomocou polárnych súradníc je výhodná pri integráloch funkcií definovaných na kruhu alebo jeho časti. Prípadne, ak integrujeme zloženú funkciu, ktorej vnútornou zložkou je funkcia x^2+y^2.