## Prednáška 1.

Matematika je vo všeobecnosti veda o samozrejmých veciach.

(Felix Klein 1849–1925)

### Pojem funkcie viacerých premenných.

Kým v zimnom semestri sme sa zaoberali funkciou jednej reálnej premennej $x$, teraz budeme uvažovať o funkciách, ktoré majú viacej - vo všeobecnosti $n$ - nezávislých premenných. Tejto n-tici premenných priradia ako hodnotu reálne číslo (skalár), preto budeme hovoriť o skalárnych funkciách viacerých premenných.

Ak graf funkcie jednej premennej ležal v rovine $R^2$, tak pri skalárnej funkcii $n$ premenných leží graf v priestore $R^{n+1}$. A $n+1$ je aspoň 3.

Akú takú geometrickú predstavu si vieme urobiť len pre funkciu dvoch premenných, kedy jej graf leží v trojrozmernom priestore $R^3$. Preto sa budeme, až na malé výnimky, venovať funkciám dvoch premenných. Okrem geometrického dôvodu, spomeňme aj fakt, že zatiaľ čo pri prechode od jednej premennej ku dvom dochádza ku významným kvalitatívnym zmenám (uvidíme ich v priebehu ďalších kapitol), pri prechode od dvoch ku viacerým premenným, tomu tak väčšinou nie je.

Azda najlepšou predstavou funkcie dvoch premenných je tvar zemského povrchu. Ak si predstavíme ako základňu rovinu $xy$ ležiacu na hladine mora, tak povrch súše je modelovaný ako funkcia dvoch premenných $x$ a $y$ (zemepisná dĺžka a šírka) a hodnota $z = f(x, y)$ je nadmorská výška. (Viem, Zem je guľatá, ale na malých plochách veľkosti Tatier, alebo Slovenska, môžeme zakrivenie zanedbať. A možno potešíme priaznivcov Terryho Pratcheta.)

Takto si vieme funkciu dvoch premenných predstaviť ako zvlnenú dvojrozmernú plochu v trojrozmernom priestore. Na túto predstavu sa budeme na viacerých miestach odvolávať.

Skôr, než pojem funkcie viacerých premenných formalizujeme, uvedieme pre lepšiu predstavu jeden príklad.

**Príklad 1.**

Majme funkciu $f : R^2 \to R$, danú predpisom

$$f(x, y) = 1 - x - y.$$

Predovšetkým si uvedomme, že naozaj môžeme hovoriť o funkcii. Každej dvojici čísel $(x, y)$ predpis priradí jedinú (skalárnu) hodnotu $z = f(x, y)$.

Napríklad dvojici $(2, 3)$ priradí hodnotu $f(2, 3) = 1 - 2 - 3 = -4$.

Dvojicu $(2, 3)$ vieme interpretovať ako bod v rovine $xy$, preto budeme v ďalšom texte často hovoriť o hodnote funkcie $f$ v danom bode.

Ďalej si všimnime, že funkčnú hodnotu vieme vypočítať pre ľubovoľný bod $(x, y)$. Hovoríme, že funkcia $f$ je definovaná v každom bode $(x, y)$ roviny $R^2$ a že definičný obor funkcie $f$ je $D_f = R^2$.

Ak vyjadríme hodnotu funkcie $f$ ako

$$z = 1 - x - y,$$

tak rovnica vyššie je rovnicou roviny v trojrozmernom priestore $R^3$. Grafom funkcie $f$ je rovina.

Každá rovina je jednoznačne určená troma (rôznymi) bodmi neležiacimi na priamke.

Vypočítajme $f(0,0) = 1$, $f(1,0) = 0$, $f(0,1) = 0$.

Body $A = [0,0,1]$, $B = [1,0,0]$, $C = [0,1,0]$ jednoznačene určujú graf funkcie $f$. (Nakreslite si ho.)

Pre znázornenie trojrozmerného zemského povrchu do dvojrozmernej papierovej alebo digitálnej mapy sa používajú vrstevnice. Vrstevnica je čiara, na ktorej má reálna krajina v každom bode rovnakú nadmorskú výšku.

Prenesené na našu funkciu, vrstevnica pre hodnotu $c$ je množina bodov $(x,y)$ takých, že funkčná hodnota $f(x,y) = c$.

V našom príklade vrstevnica pre výšku $c = 0$ je čiara $1 - x - y = 0$, teda $x + y = 1$. Vrstevnica pre výšku $c = 1$ je čiara $1 - x - y = 1$, teda $x + y = 0$. Obe čiary sú priamky a aj ostatné vrstevnice $x + y = 1 - c$ sú (pre túto konkrétnu funkciu) priamky. Zdôraznime ešte raz, že vrstevnice ležia v definičnom obore v rovine $xy$. (Nakreslite vrstevnicovú mapu funkcie $f$, vrstevnice kreslite pre $c$ volené s „rozumným" krokom.)

Ďalší trik, umožňujúci lepšiu vizualizáciu grafu funkcie, je založený na upevnení jednej jej premennej (vo všeobecnom prípade ide o upevnenie všetkých premenných okrem jednej).

Ak položíme $x_0 = 0$, tak dostanene z pôvodnej funkcie $f$ funkciu

$$f(0,y) = 1 - y$$

jednej premennej $y$. Jej graf je priamka $z = 1 - y$ a leží vo zvislej rovine $yz$, vieme ho nakresliť a nielen to, pre funkciu jednej premennej vieme použiť(čo sa hodí v zložitejšom prípade) všetky nástroje zo zimného semestra.

Pri inej voľbe, napríklad $x_1 = 1$, dostanene funkciu

$$f(1,y) = -y.$$

Jej graf je opäť priamka a leží v rovine $yz$ pri pevnom $x_1 = 1$.

Ak si rovinu $yz$ pri $x_0 = 0$ predstavíte ako rovinu obrazovky, tak rovina $yz$ pri pevnom $x_1 = 1$ je s ňou rovnobežná rovina posunutá o jednotku bližšie k vám. (Monitory s viacerými rovinami obrazovky sa ešte len začnú vyrábať. Patentované ©Boris Rudolf 2020.)

Podobne vieme zostrojiť funkciu $f(x,0) = 1 - x$ v premennej $x$ pri upevnenom $y_0 = 0$.

Funkcie s upevnenými všetkými premennými okrem jednej nazývame parciálne funkcie.

Krivku, ktorá je grafom parciálnej funkcie nazývame rezom grafu funkcie $f$ (v prípade $R^2$ plochy, príslušnou zvislou rovinou).

**Definícia.** Zobrazenie $f$, ktoré každému $\bar{x} \in A \subset R^n$ priradí jediné $y \in R$, nazývame funkcia $n$ premenných. Značíme ju $f : A \to R$.

Množinu $A$ nazývame definičný obor. Značíme ju tiež $D_f$.

Množinu $H_f = \{y \in R;\ \text{takých, že } \exists\, \bar{x} \in D_f,\ y = f(\bar{x})\}$ nazývame obor hodnôt.

Množinu $G_f = \{[\bar{x}, y] \in R^{n+1};\ \bar{x} \in D_f,\ y = f(\bar{x})\}$ nazývame graf funkcie $f$.

**Príklad 2.**

Majme funkciu $f : R^2 \to R$, danú predpisom

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Funkcia $f$ má definičný obor $D_f = R^2$.

Vrstevnice funkcie $f$ majú rovnicu

$$x^2 + y^2 = c.$$

Pre hodnotu $c < 0$ je množina bodov spĺňajúcich rovnicu vyššie prázdna.

Pre hodnotu $c = 0$ je vrstevnica jednobodová množina, obsahuje len bod $[0, 0]$.

Pre hodnotu $c > 0$ je vrstevnicou kružnica so stredom v počiatku (roviny $xy$) a s polomerom $\sqrt{c}$.

Ak prenesieme vrstevnice z roviny $xy$ do príslušnej výšky, tak na grafe funkcie $f$ leží vo výške $c$ kružnica o polomere $\sqrt{c}$.

Pozrime sa na parciálne funkcie.

Ak položíme $x_0 = 0$, tak dostanene z pôvodnej funkcie $f$ funkciu

$$f(0, y) = y^2.$$

Jej grafom je parabola $z = y^2$ ležiaca v rovine $yz$.

Podobne pre $y_0 = 0$, dostanene parciálnu funkciu

$$f(x, 0) = x^2.$$

Jej grafom je parabola $z = x^2$ ležiaca v rovine $xz$.

Zvislé rezy rovinami rovnobežnými so súradnými sú paraboly (aj pre iné voľby $x_0$, prípadne $y_0$).

Grafom funkcie $f(x, y) = x^2 + y^2$ dvoch premenných je plocha v trojrozmernom priestore, ktorá sa volá paraboloid. (Určite si nakreslite obrázok s vrstevnicami a parciálnymi funkciami.)

**Príklad 3.**

Majme funkciu $f : R^2 \to R$, danú predpisom

$$f(x, y) = \operatorname{sgn}|x| \cdot \operatorname{sgn}|y|.$$

Funkcia $f$ má definičný obor $D_f = R^2$.

Funkcia nadobúda len dve hodnoty, ak je $x \neq 0$ aj $y \neq 0$, tak jej funkčná hodnota je 1. Na osi $x$ a aj na osi $y$ je hodnota funkcie 0.

Parciálna funkcia

$$f(0, y) = 0,$$

a tiež parciálna funkcia

$$f(x, 0) = 0.$$

Parciálna funkcia $f(x_0, y)$ pri $x_0 \neq 0$ je $\operatorname{sgn}|y|$, čo je funkcia nespojitá v bode 0.

Graf pôvodnej funkcie dvoch premenných si vieme predstaviť ako vodorovnú rovinu vo výške 1, s dvoma priečnymi zárezmi v mieste osí, kde je hodnota 0.

Na tejto funkcii budeme demonštrovať niektoré vlastnosti funkcií viacerých premenných.

V celom texte sa budeme zaoberať hlavne funkciami definovanými v $R^n$, ale so skalárnymi hodnotami (v $R$).

Vo všeobecnom prípade môžu byť aj hodnoty funkcie viaczložkové, teda hodnoty sú vektory v $R^m$.

Ako užitočný pomocný nástroj budeme používať funkcie len jednej premennej, ale s hodnotami v $R^m$. Uvedieme dva príklady tohoto typu.

**Príklad 4.**

Uvažujme o funkcii $\varphi : R \to R^2$, danej predpisom

$$\varphi(t) = \left(t^2, t\right).$$

Funkcia má definičný obor $R$.

Hodnota funkcie má pre každé $t$ dve zložky, môžeme sa na každú z nich pozerať ako na funkciu jednej premennej. Nazvime zložky funkcie $\varphi$ podľa súradných osí.

$$x(t) = t^2, \qquad y(t) = t.$$

Funkciu $\varphi$ si vieme predstaviť ako krivku, ktorej body majú súradnice $[x(t), y(t)]$.

Z vyjadrenia $x(t) = (y(t))^2$ je zrejmé, že krivka je parabola $x = y^2$.

Funkcia $\varphi$ nám dáva trochu viac informácií, definuje aj usporiadanie bodov na parabole. Premennú $t$ si môžeme predstaviť ako čas, a povedať, že bod na parabole, ktorý je obrazom pre menšie $t$, bol nakreslený skôr.

Ak zmenšíme definičný obor funkcie $\varphi$, napríklad na interval $[0, \infty)$, dostaneme len časť pôvodnej krivky, v tomto prípade hornú polovicu paraboly, ktorá sa dá vyjadriť aj predpisom $y = \sqrt{x}$.

*( Poznamenajme, že na to, aby grafom funkcie $\varphi$ bola naozaj krivka, treba o jej zložkách predpokladať, že sú aspoň spojité. Často sa predpokladá, že majú aj spojitú deriváciu, ktorá nie je naraz nulová vo všetkých zložkách.)*

**Príklad 5.**

Uvažujme o funkcii $\varphi : R \to R^2$, danej predpisom

$$\varphi(t) = (1 - 2t, 2 + t).$$

Funkcia má definičný obor $R$.

Teraz

$$x(t) = 1 - 2t, \qquad y(t) = 2 + t.$$

Posledná dvojica vzťahov je parametrickým vyjadrením priamky v rovine $R^2$.

Všebecnú rovnicu priamky dostaneme vylúčením parametra $t$,

$$y = 2 + \frac{1 - x}{2} = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}.$$

Opäť ale funkcia $\varphi$ definuje aj usporiadanie bodov na priamke.

(Všimnite si, že body na priamke, ktoré sú v rovine $xy$ viac vpravo, boli nakreslené skôr. Porovnajte s funkciou $\varphi_1(t) = (1 + 2t, 2 - t)$ a usporiadaním bodov na nej.)