Obsah

Kapitola 3

Diferenciálny počet FVP

3.1 Množiny

Znakom $\mathbb{R}^m$ budeme označovať množinu

$$\mathbb{R}^m = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^m$ nazývame body, alebo vektory.

Na množine $\mathbb{R}^m$ definujeme dve operácie

1. **Súčet vektorov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich **súčtom** nazývame vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ taký, že

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1, y_2, \ldots, y_m) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_m+y_m).$$

2. **Súčin skaláru a vektora**
   Nech (skalár) $c \in \mathbb{R}$ a (vektor) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom **súčinom skaláru** c a **vektora** $\mathbf{x}$ nazývame vektor

   $$c\mathbf{x} = c(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_m).$$

Poznamenávame, že množina $\mathbb{R}^m$ spolu s uvedenými operáciami tvorí lineárny priestor.

Na množine $\mathbb{R}^m$ ďalej definujeme:

1. **Skalárny súčin vektorov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich **skalárnym súčinom** nazývame číslo (skalár)

   $$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m.$$

2. **Normu (absolútnu hodnotu) vektora**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom **normou vektora x** nazývame číslo
   $$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}.$$

3. **Vzdialenosť bodov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva body z $\mathbb{R}^m$. Potom ich **vzdialenosťou** nazývame číslo
   $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}.$$

Definícia 3.1 *Nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *a* $\varepsilon > 0$. ***Epsilonovým okolím bodu* a** *nazývame množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$. ***Prstencovým epsilonovým okolím bodu* a** *nazývame množinu* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a}) = \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$.

V prípade $\mathbb{R}^1$ *definujeme aj epsilonové okolia* $\pm\infty$. *Množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ *nazývame* ε*-ovým okolím bodu* ∞. *Prstencové* ε*-ové okolie* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty)$ *definujeme predpisom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. *Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 3.2 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. *Budeme hovoriť, že bod* $\mathbf{a}$ *je* ***hromadným bodom množiny*** A, *ak v každom* $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a})$ *leží bod množiny* A.

Definícia 3.3 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$. ***Komplementom množiny*** A *nazývame množinu* $CA = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \notin A\}$.

Definícia 3.4 *Budeme hovoriť, že* ***množina*** $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ***je otvorená***, *ak pre každé* $\mathbf{a} \in A$ *existuje* $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.

Ak množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *obsahuje všetky svoje hromadné body, tak sa nazýva* ***uzavretá množina***.

Veta 3.1 *Množina* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je otvorená práve vtedy, keď jej komplement* CA *je uzavretá množina.*

Definícia 3.5 *Budeme hovoriť, že* ***množina*** $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ***je ohraničená***, *ak existuje* $\varrho > 0$ *také, že* $A \subset \mathcal{O}_\varrho(\mathbf{0})$.

3.2 Limita a spojitosť funkcie

Definícia 3.6 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a}$ *je hromadným bodom množiny* A.

Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$ *existuje* $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$ *také, že* $f(\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$, *hovoríme, že* ***funkcia*** $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ ***má v bode* a *limitu* b**. *Píšeme* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Definícia 3.7 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, *budeme hovoriť, že* ***funkcia*** $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ ***je spojitá v bode*** $\mathbf{a}$.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in C \subset A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je* ***spojitá na množine*** C.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in A$, *tak budeme hovoriť, že* ***funkcia*** f ***je spojitá.***

Veta 3.2 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$. *Nech* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(cf)(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}_1$,
2. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$,
3. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = |\mathbf{b}_1|$.

Dôsledok 3.1 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *sú spojité funkcie a* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $(cf) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
2. $(f+g) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
3. $|f| : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Veta 3.3 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1 \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2 \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$,
2. *ak* $b_2 \neq 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak*
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{b_1}{b_2},$$

Dôsledok 3.2 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *sú spojité funkcie Potom*

1. $(fg) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*
2. *Ak* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak* $\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Definícia 3.8 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $C \subset A$. *Potom funkciu* $((f|C)) : \mathbb{R}^m \supset C \to \mathbb{R}^n$, $(f|C)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ *pre každé* $\mathbf{x} \in C$, *nazývame zúženie funkcie* f *na množine* C.

Veta 3.4 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. *Potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f|C)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Dôsledok 3.3 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj množiny* $C_2 \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f|C_1)(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f|C_2)(\mathbf{x})$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *neexistuje. (Ak by existovala, tak by museli existovať limity všetkých zúžení a tieto limity by museli byť navzájom si rovné.)*

Veta 3.5 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj* $C_2 \subset A$. *Nech* $C_1 \cup C_2 = A$. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f|C_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f|C_2)(\mathbf{x})$, *potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Veta 3.6 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. *Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé* $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ *je* $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{b}$.
- *Funkcia* g *je spojitá v bode* $\mathbf{b}$.

Potom $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$.

Veta 3.7 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *a funkcia* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $f(\mathbf{a})$. *Potom funkcia* $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$.

Dôsledok 3.4 *Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.*

Veta 3.8 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *práve vtedy, keď* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *pre* $i = 1, , \ldots, n$.

Veta 3.9 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom funkcia* f *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *práve vtedy, keď sú v tomto bode spojité funkcie* $f_i : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dôsledok 3.5 *Funkcia je spojitá práve vtedy, keď sú spojité jej zložky.*

V prípade, že uvažujeme o jednozložkových funkciách typu $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$, môžeme uvažovať o nevlastných limitách a aj o nerovnostiach medzi limitami.

Definícia 3.9 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je funkcia a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \in \{\infty, -\infty\}$. *Potom hovoríme, že* ***funkcia*** f ***má v bode*** $\mathbf{a}$ ***nevlastnú limitu****.*

Veta 3.10 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (-f(\mathbf{x})) = -\infty$.

Veta 3.11 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f + g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 3.12 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $k > 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f.g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 3.13 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = 0$.

Veta 3.14 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ *a pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) > 0$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 3.15 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $h : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Potom*

1. *Ak pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, *tak v prípade existencie vlastných limít* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$, *platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.
2. *Ak pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$, *tak existuje aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ *a platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$.

3.2.1 Príklady

1. Nájdite a načrtnite definičný obor nasledujúcich funkcií:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$.

   $$\left[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 25\}\right].$$

   (b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$.

   $$\left[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 16\}\right].$$

   (c) $f(x, y) = \ln(-x - y)$.

   $$\left[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -y\}\right].$$

   (d) $f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

   $$\left[\begin{array}{l} \text{Jednodielny rotačný hyperboloid,} \\ D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 1\} \end{array}\right].$$

   (e) $f(x, y, z) = \arccos(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln(4 - z^2)$.

   $$\left[D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad -2 < z < 2\}\right].$$

   (f) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$.

   $$\left[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 9\}\right].$$

2. Vypočítajme nasledujúce limity

   (a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x}{x+y}$ .... $\left[\frac{2}{5}\right]$.
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].
   (c) $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... $\left[\frac{3}{5}\right]$.
   (e) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... [neexistuje].
   (f) $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{(2x+y)^2-9}{4xy+2y^2+6y}$ .... $[-3]$.
   (g) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ .... $\left[\frac{3}{8}\right]$.
   (h) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{\sin x+2}{xy+2x-y}$ .... $\left[\frac{\sin 2+2}{7}\right]$.
   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$ .... $[0]$.
   (j) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+yz-xz+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$ .... $[\infty]$.
   (k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2}$ .... $[0]$.
   (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ .... [neexistuje].
   (m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{xy+2x-y}$, (polož $y=2x$ a $y=0$) .... [neexistuje].
   (n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, (polož $y=\sqrt{x}$ a $x=0$) .... [neexistuje].
   (o) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$, (polož $y=\sin x$, alebo $y=x-x^2$) [neexistuje].
   (p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y}$, (polož $x=\sqrt[3]{y^3-y}$) .... [neexistuje].
   (q) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, (polož $y=x^2$) .... [neexistuje].
   (r) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$ .... $\left[\frac{1}{4}\right]$.
   (s) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... $[\sqrt{2}]$.
   (t) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... [neexistuje].
   (u) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ .... $[12]$.
   (v) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{3y^2-3xy-6y}{1-\sqrt{x-y+3}}$ .... $[12]$.
   (w) $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{4-\sqrt{x+3y+1}}{15-x-3y}$ .... $\left[\frac{1}{8}\right]$.
   (x) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}$ .... $[e]$.
   (y) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ .... $[1]$.

3. Vypočítajme nasledujúce limity

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ .... $[1]$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ .... [1] .

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{xy}$ .... [1] .

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y}$ .... [0] .

(e) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\sin xy}{y}$ .... [3] .

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{y}$ .... [0] .

(g) $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{\sin(x+y-z-1)}{x+y-z-1}$ .... [1] .

(h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ .... [0] .

(i) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ .... [3] .

4. Nech

(a)
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(b)
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . . . [Nie je spojitá v $(0,0)$] .

(c)
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(d)
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & \text{pre } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$. . . . . . . [Je spojitá v $(0,0,0)$] .

(e)
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}, & \text{pre } x^3+y^3+z^3\neq 0,\\ 0, & \text{pre } x^3+y^3+z^3=0.\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$. . . . [Nie je spojitá v $(0,0,0)$] .

(f)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 2, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(g)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Nie je spojitá v $(0,0)$] .

(h)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Je spojitá v $(0,0)$] .

(i)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Nie je spojitá v $(0,0)$] .

(j)

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(6xy)}{y}, & \text{pre } y\neq0,\\ \text{k}, & \text{pre } (x,y)=(x,0).\end{cases}$$

- Určte číslo k tak, aby táto funkcia bola spojitá v bode $(3,0)$.

  [$k=18$] .
- Je takto dodefinovaná funkcia spojitá aj v bode $(4,0)$?

  [Nie je spojitá v $(4,0)$] .

5. V nasledujúcich príkladoch je daná funkcia $f(x,y)$ a bod $\mathbf{a}$. Dodefinujte funkciu $f(x,y)$ v bode $\mathbf{a}$ tak, aby v tomto bode bola spojitá.

   (a) $f(x,y)=\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$, $\mathbf{a}=(0,0)$. . . . . [$f(0,0)=-6$] .

   (b) $f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$, $\mathbf{a}=(2,2)$. . . . . $\left[f(0,0)=\frac{3}{8}\right]$.

   (c) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$, $\mathbf{a}=(0,0)$.

   [Funkcia sa nedá dodefinovať tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá] .

✠

3.3 Diferencovateľnosť funkcie

3.3.1 Lineárne zobrazenia

Definícia 3.10 *1. Funkciu $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazývame **lineárna funkcia**, ak pre každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$ platí*

- $L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$,
- $L(c\mathbf{x}) = cL(\mathbf{x})$.

2. *Pre každé lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ existujú $l_1, l_2, \ldots, l_m \in \mathbb{R}$ také, že*

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_mx_m.$$

Maticu

$$[L] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_m \end{bmatrix}$$

*nazývame **matica lineárneho zobrazenia** L.*

3. *$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ je lineárne zobrazenie práve vtedy, keď jeho zložky*

$$L_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ L_i(\mathbf{x}) = L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + \ldots + l_{im}x_m$$

sú lineárne zobrazenia pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom maticu

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nm} \end{bmatrix}$$

***nazývame matica lineárneho zobrazenia** L.*

4. *Je zrejmé, že pri tomto označení platí $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ práve vtedy, keď $[L]\,\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, kde $\mathbf{x}^T$ označuje transponovanú maticu riadkovej matice $\mathbf{x}$.*

3.3.2 Definícia diferencovateľnosti

Definícia 3.11 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existuje také lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, že*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$$

*Vtedy hovoríme, že **funkcia f je diferencovateľná v bode** $\mathbf{a}$. Lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazývame (prvý) **diferenciál funkcie** f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme $L = \mathcal{D}f(\mathbf{a})$.*

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\mathbf{a} \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že ***funkcia f je diferencovateľná na množine*** *M. Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná na množine A, tak hovoríme, že f je* ***diferencovateľná funkcia****.*

Poznámka 3.1 *Je zrejmé, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina) práve vtedy, keď*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Veta 3.16 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom existuje taká funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, že*

1. *$p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.*
2. *Funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$. To znamená, že $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.*
3. *Pre každé $\mathbf{x} \in A$ platí*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{a}|.$$

Veta 3.17 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom je v tomto bode spojitá.*

Veta 3.18 *Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ sú diferencovateľné v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina.) a $c \in \mathbb{R}$. Potom*

- *Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*
- *Funkcia $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Veta 3.19 *Nech A je otvorená množina. Funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď v bode $\mathbf{a}$ sú diferencovateľné jej zložky $f_i : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Navyše v prípade diferencovateľnosti platí*

$$\mathcal{D}f(\mathbf{a}) = (\mathcal{D}f_1(\mathbf{a}), \mathcal{D}f_2(\mathbf{a}), \ldots, \mathcal{D}f_n(\mathbf{a})).$$

3.3.3 Parciálne derivácie

Definícia 3.12 *1. Nech A je otvorená množina a $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A$. Potom definujeme*

$$A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in A\} \quad \textit{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

2. *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$. *Budeme uvažovať o funkciách*

$$\varphi_i : \mathbb{R} \supseteq A_i \to \mathbb{R},\ \varphi_i(t) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$.

3. *Nech existuje (vlastná) derivácia*

$$\begin{aligned}\varphi_i'(a_i) &= \lim_{t\to a_i} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(a_i)}{t - a_i} \\ &= \lim_{t\to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m) - f(\mathbf{a})}{t - a_i} \\ &= \frac{\delta f(\mathbf{a})}{\delta x_i} \\ &= f_{\cdot i}(\mathbf{a})\end{aligned}$$

Toto číslo nazývame ***parciálna derivácia funkcie*** f ***podľa*** i*-tej* ***premennej v bode*** $\mathbf{a}$.

4. *Nech* $B_i \subseteq A$ *je množina všetkých* $\mathbf{a} \in A$ *pre ktoré existuje* $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$. *Potom funkciu*

$$f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq B_i \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto f_{\cdot i}(\mathbf{x})$$

nazývame parciálna derivácia funkcie f *podľa* i*-tej premennej.*

3.3.4 Príklady

Vypočítajme parciálne derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $f(x, y) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$, $f_{\cdot 1}(x, y) =?$, $f_{\cdot 2}(x, y) =?$

$$\left[f_{\cdot 1}(x, y) = \frac{2}{y \sin\frac{2x}{y}}, \quad f_{\cdot 2}(x, y) = \frac{-2x}{y^2 \sin\frac{2x}{y}}\right].$$

2. $f(x, y, z) = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$, $f_{\cdot 1}(x, y, z) =?$

$\left[f_{\cdot 1}(x, y, z) = 3x^2y^2z + 2\right]$.

3. $f(x, y, z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}$, $f_{\cdot 2}(1, -3, 4) =?$

$\left[f_{\cdot 2}(1, -3, 4) = \frac{-1}{2}\right]$.

4. $f(x, y) = \ln(\sin xy)$, $f_{\cdot 2}(1, \frac{\pi}{2}) =?$

$\left[f_{\cdot 2}(1, \frac{\pi}{2}) = 0\right]$.

5. $f(x, y) = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$, $f_{\cdot 1}(1, 1) =?$, $f_{\cdot 2}(2, 1) =?$

$\left[f_{\cdot 1}(1, 1) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\ f_{\cdot 2}(2, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

6. $f(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}},\ f_{\cdot 1}(x,y) = ?,\ f_{\cdot 2}(x,y) = ?$

   $\left[f_{\cdot 1}(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}\left(\cos\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y},\ f_{\cdot 2}(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}\left(\cos\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right].$

7. $f(x,y) = x^{xy},\ f_{\cdot 1}(x,y) = ?,\ f_{\cdot 2}(x,y) = ?$

   $[f_{\cdot 1}(x,y) = x^{xy}(\ln x + 1)y,\ f_{\cdot 2}(x,y) = x^{xy}x\ln x].$

8. $f(x,y) = (\ln x)^{\cos y},\ f_{\cdot 1}(x,y) = ?,\ f_{\cdot 2}(x,y) = ?$

   $\left[f_{\cdot 1}(x,y) = \cos y(\ln x)^{\cos y - 1}\cdot\frac{1}{x},\ f_{\cdot 2}(x,y) = (\ln x)^{\cos y}(-\sin y)\ln(\ln x)\right].$

9. $f(x,y,z) = ze^{x^3\ln(\cos(x-y^2))},$
   $f_{\cdot 1}(x,y,z) = ?,\ f_{\cdot 2}(x,y,z) = ?,\ f_{\cdot 3}(x,y,z) = ?$

   $$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 1}(x,y,z) = ze^{x^3\ln(\cos(x-y^2))}\left(3x^2\ln(\cos(x-y^2)) - \frac{x^3\sin(x-y^2)}{\cos(x-y^2)}\right), \\ f_{\cdot 2}(x,y,z) = ze^{x^3\ln(\cos(x-y^2))}\frac{2x^3y\sin(x-y^2)}{\cos(x-y^2)}, \\ f_{\cdot 3}(x,y,z) = e^{x^3\ln(\cos(x-y^2))} \end{array}\right].$$

10. $f(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}}z,\ f_{\cdot 1}(x,y,z) = ?,\ f_{\cdot 2}(x,y,z) = ?,\ f_{\cdot 3}(x,y,z) = ?$

   $$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 1}(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)z, \\ f_{\cdot 2}(x,y,z) = 0, \\ f_{\cdot 3}(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}} \end{array}\right].$$

11. Nech

   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x - y, & \text{pre}(x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pre}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0)$.

   $[f_{\cdot 1}(0,0) = 1,\ f_{\cdot 2}(0,0) = -1].$

12. Nech $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0)$.

   $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0,\ f_{\cdot 2}(0,0) = 0].$

13. Nech

   $$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \text{pre}(x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{pre}(x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

   Vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0,0),\ f_{\cdot 3}(0,0,0)$.

   $[f_{\cdot 1}(0,0,0) = \infty,\ f_{\cdot 2}(0,0,0) = -\infty,\ f_{\cdot 3}(0,0,0) = \text{neexistuje}].$

14. Nech $f(x,y) = (x^2 + y)\sin(x+y)$. Pomocou definície vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,\pi),\ f_{\cdot 2}(0,\pi)$.

    $[f_{\cdot 1}(0,\pi) = -\pi,\ f_{\cdot 2}(0,\pi) = -\pi]$.

15. Nech $f(x,y) = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y$. Pomocou definície vypočítajme $f_{\cdot 1}(1,2),\ f_{\cdot 2}(1,2)$.

    $[f_{\cdot 1}(1,2) = 24,\ f_{\cdot 2}(1,2) = 9]$.

16. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{pre}(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pre}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Pomocou definície vypočítajme $f_{\cdot 1}(0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0)$.

    $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0,\ f_{\cdot 2}(0,0) = 0]$.

✠

Veta 3.20 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech A je otvorená množina a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$ pre $i = 1,2,\ldots,m$ a navyše*

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1,x_2,\ldots,x_m) = f_{\cdot 1}(\mathbf{a})x_1 + f_{\cdot 2}(\mathbf{a})x_2 + \ldots + f_{\cdot m}(\mathbf{a})x_m.$$

Veta 3.21 *(Postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Uvažujme o funkcii $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$, kde A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ pre $i = 1,2,\ldots,m$ a navyše tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Dôsledok 3.6 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n,\ f = (f_1,f_2,\ldots,f_n)$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech parciálne derivácie $(f_j)_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ sú spojité v bode $\mathbf{a}$ pre $j = 1,2,\ldots,n,\quad i = 1,2,\ldots,m$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

3.3.5 Príklady

1. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Vyšetrite:

    - existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i = 1,2$,

- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

$\left[f_{\cdot i}(0,0)\text{neexistujú. Nie je spojitá, a teda ani diferencovateľná, v } (0,0)\right].$

2. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

- existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i=1,2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

$\left[f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ nie je spojitá, nie je diferencovateľná v } (0,0)\right].$

3. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i=1,2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

$\left[f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ nie je spojitá, nie je diferencovateľná v } (0,0)\right].$

4. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i=1,2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

$\left[f_{\cdot 1}(0,0)=1=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ je spojitá, nie je diferencovateľná v } (0,0)\right].$

5. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i=1,2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

$$\left[\begin{array}{l}f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0),\text{ je spojitá, je diferencovateľná v } (0,0),\\ \text{parciálne derivácie nie sú spojité v } (0,0)\end{array}\right].$$

6. Nech $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

[$f_{\cdot 1}(0,0) = 1 = f_{\cdot 2}(0,0)$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$].

7. Nech $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Vyšetrite:
   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0)$, pre $i = 1, 2$,
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.

   [$f_{\cdot 1}(0,0), f_{\cdot 2}(0,0)$neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0,0)$].

8. Nech $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Vyšetrite:
   - existenciu $f_{\cdot i}(0,0,0)$, pre $i = 1, 2, 3$,
   - diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0,0)$.

   [$f_{\cdot 1}(0,0,0)$, $f_{\cdot 2}(0,0,0)$, $f_{\cdot 3}(0,0,0)$neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0,0,0)$].

9. Nech
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \text{pre } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{pre } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$
   Vyšetrite: diferencovateľnosť funkcie v bode $(0,0)$.
$$\left[\begin{array}{l} \text{nie je spojitá v } (0,0,0), \\ f_{\cdot 1}(0,0,0) = \infty,\ f_{\cdot 2}(0,0,0) = -\infty,\ f_{\cdot 3}(0,0,0) = \text{neexistuje}, \\ \text{Nie je diferencovateľná v } (0,0,0). \end{array}\right].$$

✠

3.3.6 Geometrický význam parciálnych derivácií

Z podmienky
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{a}|$$
odvodzujeme dva dôsledky:

1. $f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a})$.
2. V prípade funkcie dvoch premenných dostávame:
$$z = f(a,b) + f_{\cdot 1}(a,b)(x-a) + f_{\cdot 2}(a,b)(y-b)$$
   je rovnica dotykovej roviny grafu funkcie f v bode $T = (a, b, f(a,b))$.

3.3.7 Príklady

1. Vypočítajme približnú hodnotu $(1,94)^2 e^{0,12}$ . . . . $[4,24]$.

2. Vypočítajme približnú hodnotu $4,004(2,002)^2(3,003)^3$. . . . $[434,592]$.

3. Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4 + 2y$ v bode $T = (1,1,?)$.

   $$\left[\begin{array}{l}\text{dotyková rovina:} \quad z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1), \\ \text{normála:} \quad x = 1 + 4t,\ y = 1 + 2t,\ z = 3 - t\end{array}\right].$$

4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bode $T = (1,?,2)$. . . . . $[z = 2 + 5(x-1) + y]$.

5. Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x,y) = xy$ v bode $T = (?,2,2)$.

   $$\left[\begin{array}{l}\text{dotyková rovina:} \quad z = 2 + 2(x-1) + (y-2), \\ \text{normála:} \quad x = 1 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 2 - t\end{array}\right].$$

6. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ v bode $T = (1,-1,1)$. . . . . $\left[z = 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y+1)\right]$.

7. Ukážte, že plochy $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ a $4 + x + 2y = \ln z$ sa dotýkajú (majú spoločnú dotykovú rovinu) v bode $T = (2,-3,1)$. $[z = 1 + (x-2) + 2(y+3)]$.

3.3.8 Diferencovateľnosť zloženej funkcie

Veta 3.22 *(Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $f(\mathbf{a}) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ a platí*

$$\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{D}g(f(\mathbf{a})) \circ \mathcal{D}f(\mathbf{a}).$$

Pre matice zložených lineárnych zobrazení platí:

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]\,.$$

Nech

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n,\ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n),\ \mathbf{a} \in A \\ g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \end{array}$$

Potom

$$[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = [g_{\cdot 1}(\mathbf{b}), g_{\cdot 2}(\mathbf{b}), \ldots, g_{\cdot n}(\mathbf{b})]\,.$$

Ďalej

$$[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} f_{1\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{1\cdot 2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{1\cdot m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{n\cdot 2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{n\cdot m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Potom z podmienky

$$[\mathcal{D}(g\circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(\mathbf{b})]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]$$

dostávame

$$(g\circ f)_{\cdot k}(\mathbf{a}) = (g_{\cdot 1}(\mathbf{b})f_{1\cdot k}(\mathbf{a}) + g_{\cdot 2}(\mathbf{b})f_{2\cdot k}(\mathbf{a}) + \ldots + g_{\cdot n}(\mathbf{b})f_{n\cdot k}(\mathbf{a}))_{\mathbf{b}=f(\mathbf{a})}.$$

Tento výsledok sa zapisuje symbolicky v tvare tzv. reťazového pravidla:

$$\frac{\delta(g\circ f)}{\delta x_k} = \frac{\delta g}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_k} + \frac{\delta g}{\delta y_2}\frac{\delta y_2}{\delta x_k} + \ldots + \frac{\delta g}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_k}.$$

3.3.9 Príklady

1. Nech $f : (0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to (-\infty,\infty)\times(0,1)$, $f(x,y) = (\ln x, \cos y)$ a $g : (-\infty,\infty)\times(0,1) \to \mathbb{R}^3$, $g(u,v) = \big(uv, \frac{u}{v}, 1\big)$. Nájdite maticu $[\mathcal{D}h(\mathbf{a})]$ diferenciála zloženej funkcie $h = g\circ f : (0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ v ľubovoľnom bode $\mathbf{a} = (a_1,a_2) \in (0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$$\left[\begin{array}{l}
f(\mathbf{a}) = (\ln a_1, \cos a_2) = (b_1,b_2) = \mathbf{b}, \\[1ex]
g(\mathbf{b}) = g(b_1,b_2) = \Big((\ln a_1)\cos a_2, \frac{\ln a_1}{\cos a_2}, 1\Big), \\[1ex]
[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & -\sin a_2 \end{bmatrix}, \\[1ex]
[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \\ \frac{1}{b_2} & \frac{-b_1}{b_2^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\[1ex]
[\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))] = \begin{bmatrix} \cos a_2 & \ln a_1 \\ \frac{1}{\cos a_2} & \frac{-\ln a_1}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\[1ex]
\quad [\mathcal{D}h(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \\[2ex]
= \begin{bmatrix} \cos a_2 & \ln a_1 \\ \frac{1}{\cos a_2} & \frac{-\ln a_1}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & \cos a_2 \end{bmatrix} = \\[1ex]
= \begin{bmatrix} \frac{\cos a_2}{a_1} & -(\ln a_1)\sin a_2 \\[2ex] \frac{1}{a_1\cos a_2} & \frac{(\ln a_1)\sin a_2}{(\cos a_2)^2} \\[2ex] 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}\right].$$

3.3.10 Zmiešané parciálne derivácie

Z parciálnych derivácií (prvého rádu) je možné opäť získavať parciálne derivácie. Sú to parciálne derivácie druhého rádu. Ich derivovaním získavame parciálne derivácie tretieho rádu, atď. Napríklad, ak uvažujeme o parciálnej derivácii podľa druhej premennej, je možné počítať jej parciálnu deriváciu podľa štvrtej premennej nasledujúcim spôsobom:

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 4} = f_{\cdot 24} = \frac{\delta}{\delta x_4}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}.$$

Podobne

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 2} = f_{\cdot 22} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta {x_2}^2}.$$

Pre derivácie tretieho rádu dostávame

$$(f_{\cdot 24})_{\cdot 3} = (f_{\cdot 243}) = \frac{\delta}{\delta x_3}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}\right) = \frac{\delta^3 f}{\delta x_3 \delta x_4 \delta x_2}.$$

Všimnime si, že pri rôznych zápisoch derivácie dostávame opačné poradia derivovania.

Veta 3.23 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvorená množina a je daná funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech existujú $f_{\cdot 1} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$, $f_{\cdot 2} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ a $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech funkcia $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existuje $f_{\cdot 21}(\mathbf{a})$ a platí*

$$f_{\cdot 12}(\mathbf{a}) = f_{\cdot 21}(\mathbf{a}).$$

Veta 3.24 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane. Potom tie parciálne derivácie k-tého rádu ($2 \le k \le r$), v ktorých sa podľa rovnakých premenných rovnako veľa razy derivuje (bez ohľadu na poradie), sú rovnaké.*

Definícia 3.13 *Ak **funkcia** $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane, tak hovoríme, že **je r-razy spojito diferencovateľná**.*

3.3.11 Príklady

1. Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x,y) = yx^{\frac{x}{y}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x,y) = x^{\frac{x}{y}}\left(\frac{(\ln x+1)^2}{y} + \frac{1}{x}\right), \\ f_{\cdot 12}(x,y) = f_{\cdot 21}(x,y) = x^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x(\ln x+1)\ln x}{y^2}\right), \\ f_{\cdot 22}(x,y) = x^{\frac{x}{y}}\frac{(x\ln x)^2}{y^3} \end{array}\right].$$

2. Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x,y,z) = \frac{2(x^2+y^2+z^2)-4x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 12}(x,y,z) = f_{\cdot 21}(x,y,z) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 13}(x,y,z) = f_{\cdot 31}(x,y,z) = \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 22}(x,y,z) = \frac{2(x^2+y^2+z^2)-4y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 23}(x,y,z) = f_{\cdot 32}(x,y,z) = \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 33}(x,y,z) = \frac{2(x^2+y^2+z^2)-4z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{array}\right].$$

3. Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y, z) = 2^{xyz}.$$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x,y,z) = 2^{xyz}\left(yz\ln 2\right)^2, \\ f_{\cdot 12}(x,y,z) = f_{\cdot 21}(x,y,z) = z(\ln 2)2^{xyz}\left(xyz\ln 2 + 1\right), \\ f_{\cdot 13}(x,y,z) = f_{\cdot 31}(x,y,z) = y(\ln 2)2^{xyz}\left(xyz\ln 2 + 1\right), \\ f_{\cdot 22}(x,y,z) = 2^{xyz}\left(xz\ln 2\right)^2, \\ f_{\cdot 23}(x,y,z) = f_{\cdot 32}(x,y,z) = x(\ln 2)2^{xyz}\left(xyz\ln 2 + 1\right), \\ f_{\cdot 33}(x,y,z) = 2^{xyz}\left(xy\ln 2\right)^2 \end{array}\right].$$

4. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vypočítajme $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$. $\ldots [f_{\cdot 12}(0,0) = -1,\ f_{\cdot 21}(0,0) = 1]$.

5. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vypočítajme $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$. $\ldots\ldots [f_{\cdot 12}(0,0) = 0,\ f_{\cdot 21}(0,0) = 1]$.

6. Nech

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vypočítajme $f_{\cdot 1}(x,y)$ a $f_{\cdot 12}(x,y)$ pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left[\begin{array}{c} f_{\cdot 1}(x,y)=\frac{2x^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{pre } (x,y)\neq 0,\ f_{\cdot 1}(0,0)=2, \\ \\ f_{\cdot 12}(x,y)=\frac{4x^2y\left(x^2-3y^2\right)}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{pre } (x,y)\neq 0,\ f_{\cdot 12}(0,0)=\text{neexistuje} \end{array}\right].$$

7. Nech

$$f(x,y)=\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Vypočítajme $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$.

$[f_{\cdot 12}(0,0)=0,\ f_{\cdot 21}(0,0)=0]$.

3.3.12 Derivácia vo smere, gradient

Nech je daná funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ a A je otvorená množina. Nech funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}\in A$. Uvažujme o jednotkovom vektore $\mathbf{e}=(e_1,e_2,\dots,e_m)\in\mathbb{R}^m$. Pretože A je otvorená množina, musí existovať $\tau>0$ také, že pre každé $t\in(-\tau,\tau)$ platí $\mathbf{a}+\mathbf{e}t\in A$.

Potom je zrejmé, že funkcia

$$h:\mathbb{R}\supseteq(-\tau,\tau)\to A\subseteq\mathbb{R}^m,\ h(t)=\mathbf{a}+\mathbf{e}t=(a_1+e_1t,a_2+e_2t,\dots,a_m+e_mt)$$

je diferencovateľná v bode 0. Tak isto v bode 0 je diferencovateľná aj funkcia

$$r=(f\circ h):\mathbb{R}\supseteq(-\tau,\tau)\to A\subseteq\mathbb{R},\ r(t)=f(h(t))=f(\mathbf{a}+\mathbf{e}t).$$

Preto existuje

$$r'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{r(t)-r(0)}{t-0}.$$

Túto deriváciu môžeme vypočítať pomocou reťazového pravidla nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} r'(0)=&f_{\cdot 1}(h(0))h_1'(0)+f_{\cdot 2}(h(0))h_2'(0)+\cdots+f_{\cdot m}(h(0))h_m'(0)\\ &=f_{\cdot 1}(\mathbf{a})e_1+f_{\cdot 2}(\mathbf{a})e_2+\cdots+f_{\cdot m}(\mathbf{a})e_m\\ &=(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\dots,f_{\cdot m}(\mathbf{a}))\cdot(e_1,e_2,\dots,e_m)\\ &=(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\dots,f_{\cdot m}(\mathbf{a}))\cdot\mathbf{e}\\ &=f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Číslo $r'(0)=f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ nazývame **derivácia funkcie f v bode a vo smere** (jednotkového) **vektora e**.

Vektor $(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\dots,f_{\cdot m}(\mathbf{a}))$ nazývame **gradient funkcie** f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a})=(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}),f_{\cdot 2}(\mathbf{a}),\dots,f_{\cdot m}(\mathbf{a})).$$

Pri tomto označení dostávame

$$f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}.$$

Z vlastnosti skalárného súčinu vyplýva, že

$$|f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})| = |\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}| \leq |\operatorname{grad} f(\mathbf{a})||\mathbf{e}| = |\operatorname{grad} f(\mathbf{a})|.$$

Z toho už vyplýva: Ak zvolíme jednotkový vektor v tvare

$$\mathbf{e} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{a})}{|\operatorname{grad} f(\mathbf{a})|},$$

potom dostaneme

$$f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{a})}{|\operatorname{grad} f(\mathbf{a})|} = |\operatorname{grad} f(\mathbf{a})|.$$

Z toho vyplýva, že gradient udáva smer, v ktorom sa funkcia najrýchlejšie mení.

3.3.13 Príklady

1. Nech $f(x,y) = e^{xy^2}$, $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$. Vypočítajme $f_{\cdot\mathbf{e}}(2,1)$.

   $\left[f_{\cdot\mathbf{e}}(2,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-8e^4)\right]$.

2. Nech $f(x,y) = e^y \cos(x+y)$, $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$. Vypočítajme $f_{\cdot\mathbf{e}}(\frac{\pi}{2},0)$.

   $\left[f_{\cdot\mathbf{e}}(\frac{\pi}{2},0) = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\right]$.

3. Nech $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ a $\mathbf{a} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}\right)$.

   (a) Vypočítajme $f_{\cdot\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ vo smere ľubovoľného jednotkového vektora $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$. .... $\left[f_{\cdot\mathbf{e}}\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}\right) = e_1 + e_2\right]$.

   (b) Zistime, v ktorom smere je derivácia

   - nulová.............. $\left[\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$,
   - najväčšia .... $\left[\mathbf{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$,
   - najmenšia.......................... $\left[\mathbf{e}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.

4. Nájdime jednotkový vektor, v ktorého smere sa funkcia $f(x,y,z) = y^2 \sin(xyz)$ v bode $\mathbf{a} = (1,1,\pi)$ mení najrýchlejšie. Určite rýchlosť (veľkosť) tejto zmeny. ... $\left[\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi^2}}(-\pi,-\pi,-1), f_{\cdot\mathbf{e}} = \sqrt{1+2\pi^2}\right]$.

5. Nech $f(x,y) = x^2 - 2xy + x - y^2 + 3y$. Nájdime bod, v ktorom je derivácia tejto funkcie v každom smere nulová. .... $\left[(\frac{1}{2},1)\right]$.

6. Nech
$$f(x,y) = \frac{2}{(3x^2+4y^2)^2}.$$
Nájdime gradient a diferenciál tejto funkcie v bode $\mathbf{a} = (-1,1)$.
$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{grad} f(-1,1) = \left(\frac{24}{343}, \frac{-32}{343}\right), \\ \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1,x_2) = \frac{24}{343}x_1 - \frac{32}{343}x_2 \end{array}\right].$$

3.3.14 Lokálne extrémy

Definícia 3.14 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in A$.*
Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$, že:

1. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***rýdze lokálne maximum**.*

2. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***rýdze lokálne minimum**.*

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$, že:

1. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***lokálne maximum**.*

2. *Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ ***lokálne minimum**.*

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrémy.

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ ***totálne (globálne) maximum**.*

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ ***totálne (globálne) minimum**.*

Je zrejmé, že v bodoch, v ktorých funkcia nadobúda totálne extrémy, nadobúda aj lokálne extrémy.

Veta 3.25 *(Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$.*

2. *Funkcia f je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$.

3. *Funkcia f má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálny extrém.*

Potom $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Poznámka 3.2 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná, tak nezáleží na poradí derivovania v parciálnych deriváciach druhého rádu.*

Definícia 3.15 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine A a $\mathbf{a} \in A$. Potom definujem **druhý diferenciál funkcie** f ako funkciu*

$$\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) x_i x_j.$$

To znamená, že hodnota druhého diferenciálu je homogénny polynóm druhého stupňa

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= f_{\cdot 11}(\mathbf{a})x_1x_1 + f_{\cdot 12}(\mathbf{a})x_1x_2 + \ldots + f_{\cdot 1m}(\mathbf{a})x_1x_m + \\ &+ f_{\cdot 21}(\mathbf{a})x_2x_1 + f_{\cdot 22}(\mathbf{a})x_2x_2 + \ldots + f_{\cdot 2m}(\mathbf{a})x_2x_m + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ f_{\cdot m1}(\mathbf{a})x_mx_1 + f_{\cdot m2}(\mathbf{a})x_mx_2 + \ldots + f_{\cdot mm}(\mathbf{a})x_mx_m \end{aligned}$$

Je zrejmé, že v tomto polynóme platí

$$f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) = f_{\cdot ji}(\mathbf{a}).$$

Veta 3.26 *(Taylorova veta) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine A a nech pre každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ je $(\mathbf{a} + t\mathbf{x}) \in A$. Potom existuje $t \in (0, 1)$ také, že*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \frac{\mathcal{D}^0 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{0!} + \frac{\mathcal{D}^1 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})(\mathbf{x})}{2!}.$$

Vo všeobecnosti homogénny polynóm druhého stupňa m-premenných je v tvare

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1m}x_1x_m + \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2m}x_2x_m + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_{m1}x_mx_1 + a_{m2}x_mx_2 + \ldots + a_{mm}x_mx_m \end{aligned}$$

V tomto polynóme platí $a_{ij} = a_{ji}$, pre $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Definícia 3.16 *Nech*

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \textit{pre} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

je homogénny polynóm druhého stupňa m-premenných (symetrická kvadratická forma). Ak

1. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *je* $P(\mathbf{x}) \geq 0$, *tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je kladne semidefinitný***.
2. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je* $P(\mathbf{x}) > 0$, *tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je kladne definitný***.
3. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *je* $P(\mathbf{x}) \leq 0$, *tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ *je* ***záporne semidefinitný***.
4. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je* $P(\mathbf{x}) < 0$, *tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je záporne definitný***.
5. *existujú* $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^m$ *také, že* $P(\mathbf{x_1})P(\mathbf{x_2}) < 0$, *tak hovoríme, že* ***polynóm*** $P(\mathbf{x})$ ***je indefinitný***.

Pri riešení príkladov je veľmi užitočná veta, ktorá hovorí o vzťahu definitnosti a semidefinitnosti symetrických homogénnych polynómov druhého stupňa. Sformulujeme ju pomocou matice priradenej k danému polynómu.

Vo všeobecnosti homogénny polynóm druhého stupňa m-premenných je v tvare

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m)& \\
&= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1m}x_1x_m + \\
&+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2m}x_2x_m + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ a_{m1}x_mx_1 + a_{m2}x_mx_2 + \ldots + a_{mm}x_mx_m,
\end{aligned}$$

a teda je mu priradená matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Veta 3.27 *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne (záporne) definitný práve vtedy, keď* $\mathbf{A}$ *je regulárna matica (t.j.* $\det \mathbf{A} \neq 0$*) a súčasne* $P(\mathbf{x})$ *je kladne (záporne) semidefinitný polynóm.*

S každou symetrickým homogénnym polynómom druhého stupňa sú spojené nasledujúce determinanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \text{pre} \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Veta 3.28 *(Sylvestrovo kritérium) Nech je symetrický homogénny polynóm druhého stupňa* $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$.

1. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne definitný práve vtedy, keď* $\Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \ldots, m$.

2. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je záporne definitný práve vtedy, keď* $(-1)^k\Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \ldots, m$.

Zo Sylvestrovho kritéria a Vety 3.27 vyplýva

Dôsledok 3.7 *Ak* $\Delta_m \neq 0$ *a polynóm* $P(\mathbf{x})$ *nie je definitný (kladne, alebo záporne), tak je indefinitný.*

Veta 3.29 *(Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine* A. *Nech pre* $\mathbf{a} \in A$ *platí* $\mathrm{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. *Potom*

1. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je kladne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne minimum.*

2. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je záporne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne maximum.*

3. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je indefinitný, tak funkcia* f *nemá v bode* $\mathbf{a}$ *extrém.*

Definícia 3.17 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je ohraničená a uzavretá množina. Potom hovoríme, že* A *je* ***kompaktná množina****.*

Veta 3.30 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá na kompaktnej množine* A. *Potom na tejto množine nadobúda (totálne) maximum a aj minimum. To znamená, že existujú* $\mathbf{c}, \mathbf{C} \in A$ *také, že pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *platí:*

$$f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{C}).$$

3.3.15 Príklady

1. Vyšetrite stacionárne body a lokálne extrémy nasledujúcich funkcií:

   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$.
   $$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0,0), \text{ nemá extrém,} \\ \mathbf{b} = (-1,-1), \text{ rýdze lokálne maximum } f(\mathbf{b}) = 3 \end{array}\right].$$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^3$.
   $[\mathbf{a} = (0,0), \text{ nemá extrém}]$.

   (c) $f(x, y) = x^2 + y^4$.
   $[\mathbf{a} = (0,0), \text{ rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0]$.

(d) $f(x,y) = x^2(1+y^2)$.
$[\mathbf{a} = (0,y),\ \text{lokálne minimum } f(0,y) = 0]$.

(e) $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$.
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0,-1),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{b} = (2,1),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(2,1) = -7 \end{array}\right].$$

(f) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.
$[\mathbf{a} = (1,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(1,0) = -1]$.

(g) $f(x,y) = \frac{xy}{2} + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.
$[\mathbf{a} = (21,20),\ \text{rýdze lokálne maximum } f(21,20) = 282]$.

(h) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (1,4),\ \mathbf{b} = (1,-4),\ \mathbf{c} = \left(\frac{-5}{3}, 0\right),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{d} = (0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0 \end{array}\right].$$

(i) $f(x,y) = xy(2 - x - y)$.
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0,0),\ \mathbf{b} = (0,2),\ \mathbf{c} = (2,0),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{d} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \text{rýdze lokálne maximum } f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \end{array}\right].$$

(j) $f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}, \quad x > 0,\ y > 0$.
$\left[\mathbf{a} = \left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right),\ \text{rýdze lokálne minimum } f\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right) = 30\right]$.

(k) $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0, \\ \mathbf{b} = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}\right),\ \text{nemá extrém} \end{array}\right].$$

(l) $f(x,y) = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$.
$\left[\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, -1\right),\ \text{rýdze lokálne minimum } f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{-e}{2}\right]$.

(m) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$.
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(0,0) = 0, \\ \mathbf{b} = (0,1),\ \text{rýdze lokálne maximum } f(0,1) = \frac{2}{e}, \\ \mathbf{c} = (0,-1),\ \text{rýdze lokálne maximum } f(0,-1) = \frac{2}{e}, \\ \mathbf{d} = (1,0),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{e} = (-1,0),\ \text{nemá extrém} \end{array}\right].$$

(n) $f(x,y) = x^2y^2(3 - 4x + 6y)$.
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = \left(\frac{3}{10}, \frac{-1}{5}\right),\ \text{rýdze lokálne minimum } f\left(\frac{3}{10}, \frac{-1}{5}\right) = \frac{27}{12400}, \\ \mathbf{b}_x = (x,0),\ \text{pre } x > \frac{3}{4} \text{ lokálne maximum } f(x,0) = 0, \\ \mathbf{c}_y = (0,y),\ \text{pre } y < \frac{1}{2} \text{ lokálne maximum } f(0,y) = 0, \\ \mathbf{d}_x = (x,0),\ \text{pre } x < \frac{3}{4} \text{ lokálne minimum } f(x,0) = 0, \\ \mathbf{e}_y = (0,y),\ \text{pre } y > \frac{1}{2} \text{ lokálne minimum } f(0,y) = 0, \\ \mathbf{f} = \left(\frac{3}{4}, 0\right),\ \mathbf{g} = \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ nemá extrém} \end{array}\right].$$

(o) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0,0,-1),\ \text{nemá extrém}, \\ \mathbf{b} = (24,-144,-1),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(24,-144,-1) = -6913 \end{array}\right].$$

(p) $f(x,y,z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$.
$[\mathbf{a} = (8,5,-2),\ \text{rýdze lokálne minimum } f(8,5,-2) = 9]$.

(q) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6$.
$\left[\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2),\ \text{rýdze lokálne minimum},\ f(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2) = \frac{-1}{3}\right]$.

(r) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.
$[\mathbf{a} = (0,0,0),\ \text{nemá extrém}]$.

(s) $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$.
$[\mathbf{a} = (0,0,0),\ \text{rýdze lokálne minimum},\ f(0,0,0) = 1]$.

(t) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
$[\mathbf{a} = (-1,-2,3),\ \text{rýdze lokálne minimum}\ f(-1,-2,3) = -14]$.

(u) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.
$[\mathbf{a} = (2,1,7),\ \text{nemá extrém}]$.

(v) $f(x,y,z) = y^2 + 2z^2 + 2x - xy - xz$.
$\left[\mathbf{a} = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}),\ \text{nemá extrém}\right]$.

(w) $f(x,y,z) = 3x^2 + 3x + 2y^2 + 2yz + 2y + 2z^2 - 2z$.
$\left[\mathbf{a} = (\frac{-1}{2}, -1, 1),\ \text{rýdze lokálne minimum}\ f(\frac{-1}{2}, -1, 1) = \frac{-11}{4}\right]$.

(x) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.
$\left[\mathbf{a} = (\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, -1),\ \text{rýdze lokálne minimum}\ f(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, -1) = \frac{-4}{3}\right]$.

2. Nájdime (totálne, globálne) extrémy funkcií:

(a) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na množine $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničená priamkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0\}$.
$[-19 \leq f(x,y) \leq -1]$.

(b) $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$ na trojuholníku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6\}$.
$\left[-128 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}\right]$.

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na obdĺžniku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x = 0,\ x = 2,\ y = -1,\ y = 2\}$.
$[-1 \leq f(x,y) \leq 13]$.

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16)$ na množine $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 49\}$.
$[-20 \leq f(x,y) \leq 149]$.

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na kruhu $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.
$[0 \leq f(x,y) \leq 5]$.

3. Nájdite lokálne extrémy funkcie:

$$f(x,y) = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (-1,-1),\ \text{rýdze lokálne maximum}\ f(-1,-1) = 0, \\ \mathbf{b} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}),\ \text{nemá extrém} \end{array}\right].$$

Kapitola 4

Integrálny počet FVP

4.1 Úvodné pojmy

Definícia 4.1 *Množinu*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_m, b_m\rangle \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, m\} \end{aligned}$$

nazývame uzavretý interval. Číslo

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_m - a_m)$$

nazývame miera intervalu I.

Definícia 4.2 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taká konečná množina intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_k$, že*

- $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j$,
- $\mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots + \mu(I_k) < \varepsilon$,

tak hovoríme, že A je množina miery nula.

Definícia 4.3 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ nazývame hraničným bodom množiny A, ak v každom jeho okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a})$ existujú body aj z množiny A a aj body, ktoré do množiny A nepatria. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame hranica množiny a označujeme znakom* $\mathrm{hr}\,(A)$.

Definícia 4.4 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je ohraničená množina. Ak hranica* $\mathrm{hr}\,(A)$ *tejto množiny je množina miery nula, tak hovoríme, že množina A je merateľná množina.*

Definícia 4.5 *Nech $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ a $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $f(x) \le g(x)$ pre každé $x \in \langle a,b\rangle$. Potom množinu*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x,y]$.

Analogicky definujeme elementárnu oblasť typu $[y,x]$.

Definícia 4.6 *Nech $B \subset \mathbb{R}^2$ je elementárna oblasť typu $[x,y]$. Nech $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ pre každé $(x,y) \in B$. Potom množinu*

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x,y,z]$.

Množina $A \subset \mathbb{R}^3$ je elementárnou oblasťou typu $[x,y,z]$ práve vtedy, keď

- *existujú spojité funkcie $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ a $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ také, že $f(x) \le g(x)$ pre každé $x \in \langle a,b\rangle$,*
- *$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$,*
- *existujú spojité funkcie $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ také, že $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ pre každé $(x,y) \in B$,*
- *$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x),\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$.*

Podobným spôsobom definujeme v $\mathbb{R}^3$ elementárne oblasti aj iných typov.

Elementárne oblasti je možné definovať aj v priestore $\mathbb{R}^m$ pre $m > 3$.

Veta 4.1 *Všetky elementárne oblasti sú merateľné množiny.*

4.2 Definícia integrálu na intervale

Definícia 4.7 *1. Nech*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_m,b_m\rangle \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ pre } i = 1,2,\ldots,m\} \end{aligned}$$

je uzavretý interval. Nech D_i je delenie intervalu $\langle a_i,b_i\rangle$ pre $i = 1,2,\ldots,m$. Potom m-ticu $D = (D_1,D_2,\ldots,D_m)$ nazývame delenie intervalu I. Číslo $\|D\| = \max\{\|D_i\| \mid i = 1,2,\ldots,m\}$ nazývame norma delenia D. Každým delením m-rozmerného intervalu I je určený konečný počet m-rozmerných deliacich intervalov $I_1,I_2,\ldots,I_k$, na ktoré je rozdelený interval I. To znamená, že $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$ a deliace intervaly môžu mať spoločné len hraničné body.

2. *Nech* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť delení intervalu* I. *Ak* $\lim_{n\to\infty} \|D^{(n)}\| = 0$, *potom hovoríme, že postupnosť* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *je normálna postupnosť delení intervalu* I.

3. *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$ *a* D *s deliacimi intervalmi* $I_1, I_2, \ldots, I_k$ *je ľubovoľné delenie intervalu* I. *Nech body* $\mathbf{c}_i \in I_i$ *sú ľubovoľne zvolené pre* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Potom číslo*

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\mathbf{c}_i)\mu(I_i)$$

nazývame integrálny súčet funkcie f *pre dané delenie* D *intervalu* I *a voľbu bodov* $c_i \in I_i$.

Definícia 4.8 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$. *Ak pre každú normálnu postupnosť delení* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *intervalu* I *a každú voľbu bodov* c_i *v integrálnych súčtoch* $S_{D^{(n)}}(f)$, *postupnosť* $(S_{D^{(n)}}(f))_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k tomu istému číslu* J, *tak hovoríme, že funkcia* f *je integrovateľná na intervale* I. *Číslo*

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D^{(n)}}(f)$$

nazývame integrál funkcie f *na intervale* I *a označujeme*

$$J = \int_I f = \int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \iint_I f(x, y)\, dxdy = \iiint_I f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Veta 4.2 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervale* $I \subseteq M$. *Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Veta 4.3 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$. *Nech množina bodov z intervalu* I, *v ktorých* f *nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia* f *na intervale* I *integrovateľná.*

4.3 Definícia integrálu na množine

Definícia 4.9 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na ohraničenej množine* $A \subseteq M$. *Nech* $I \supseteq A$ *je ľubovoľný interval. Nech*

$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{pre } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{pre } \mathbf{x} \notin A. \end{cases}$$

Ak funkcia $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale I, tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na množine A a píšeme

$$\int_A f = \int_I f_A = \iint_A f(x,y)\,dxdy = \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Veta 4.4 *(Postačujúca podmienka integrovateľnosti na množine) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je ohraničená na merateľnej množine $A \subseteq M$. Nech množina tých bodov z množiny A, v ktorých f nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia f na množine A integrovateľná.*

4.4 Vlastnosti integrálu

Veta 4.5 *Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na množine $A \subseteq M$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

1. *Funkcia $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí*

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

2. *Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí*

$$\int_A (cf) = c\int_A f.$$

3. *Funkcia $|f| : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí*

$$|\int_A f| \le \int_A |f|.$$

Veta 4.6 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je množina miery nula a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je ohraničená na množine A. Potom $\int_A f = 0$.*

Veta 4.7 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množinách $A, B \subseteq M$, pričom $A \cap B$ je množina miery nula. Potom*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Definícia 4.10 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je merateľná množina. Potom mieru $\mu(A)$ množiny A definujeme pomocou predpisu:*

$$\mu(A) = \int_A 1.$$

4.5 Fubiniho vety

Veta 4.8 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

typu $[x, y]$. Nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje integrál

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy.$$

Potom

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy\Big) dx.$$

Podobná veta platí pre elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Veta 4.9 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^3 \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B,\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$$

typu $[x, y, z]$. Nech pre každé $(x, y) \in B$ existuje integrál

$$\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Potom

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_B \Big(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz\Big) dxdy.$$

Dôsledok 4.1 *Nech A je elementárna oblasť typu $[x, y, z]$ a na elementárnej oblasti $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$ sú splnené podmienky Fubiniho vety pre funkciu dvoch premenných. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} \Big(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz\Big) dy\Big) dx.$$

Podobné vety platia pre zvyšné typy elementárnych oblastí v $\mathbb{R}^3$.

4.5.1 Príklady

Pomocou Fubiniho viet vypočítajte nasledujúce integrály a načrtnite obrázok príslušných množín, na ktorých integrujeme:

1. $\iint\limits_I \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy$, ak $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. .... $\left[\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{2}} = 0,2229\right]$.

2. $\iint\limits_I \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy$, ak $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

   $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{arctg}\,\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{4}\right]$.

3. $\iint\limits_I x^2 y\cos(xy^2)dxdy$, ak $I = \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,2\rangle$. .... $\left[-\frac{\pi}{16}\right]$.

4. $\iint\limits_I ye^{x+y}dxdy$, ak $I = \langle 0,4\rangle \times \langle 0,1\rangle$. .... $\left[e^4-1\right]$.

5. $\iint\limits_I \ln(1+x)^{2y}dxdy$, ak $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. ....$[2\ln 2 - 1]$.

6. $\iint\limits_I \frac{1}{(1-xy)^2}dxdy$, ak $I = \langle 2,3\rangle \times \langle 1,2\rangle$. .... $\left[\ln\frac{6}{5}\right]$.

7. $\iint\limits_A \cos(x+y)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ x \le y \le \pi\}$. ... $[2]$.

8. $\iint\limits_A \left(3x^2+2y\right)\,dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2 \le y \le \sqrt{x},\ x \ge 0\}$. .. $\left[\frac{39}{70}\right]$.

9. $\iint\limits_A xy\,dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x-4 \le y,\ y^2 \le 2x\}$. ....$[90]$.

10. $\iint\limits_A ye^x dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid y^2 \le x \le y+2\}$. .... $\left[\frac{1}{2}(e^4+5e)\right]$.

11. $\iint\limits_A (x+y)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ y \le x \le 2y\}$. ..... $\left[\frac{7}{3}\right]$.

12. $\iint\limits_A \frac{x^2}{y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 < \frac{1}{x} \le y \le x,\ x \le 2\}$. .... $\left[\frac{9}{4}\right]$.

13. $\iint\limits_A |x|dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x^2$, $4x^2+y^2 = 12$, a platí, že $y \ge 0$. .... $\left[4\sqrt{3}-\frac{10}{3}\right]$.

14. $\iint\limits_A \left(x^2+y\right)\,dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $xy = 2$ a platí, že $x \ge 0$. .... $\left[\frac{17}{6}\right]$.

15. $\iint\limits_A \left(x^2+y\right)\,dxdy$, ak množina A je trojuholník KLM, pričom $K = (1,2)$, $L = (5,2)$, $M = (4,4)$. ....$[58]$.

16. $\iint\limits_A \sqrt{xy-y^2}dxdy$, ak $A=\{(x,y) \mid 0\le y\le 3,\ \frac{x}{10}\le y\le x\}$.
$[162]$.

17. Vypočítajme plošný obsah množiny A, ktorá je ohraničená krivkami $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\ y^2=x+1$ a obsahuje bod $(0,0)$. ..... $\left[8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$.

18. $\iint\limits_A (x^2y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y=x,\ y=x^2$.
$\left[\frac{1}{35}.\right]$

19. $\iint\limits_A (x^2y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y=x-4,\ y^2=2x$. .... $\left[\frac{2412}{5}.\right]$

20. $\iint\limits_A (x+y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $x=0,\ y=\frac{3}{2}x,\ y=4-(x-1)^2$, pričom $x\ge 0$. .... $\left[\frac{13}{3}\right]$.

21. $\iiint\limits_A (1-x)\ dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z) \mid 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ z\le 1-x-y\}$. .... $\left[\frac{1}{8}.\right]$

22. $\iiint\limits_A y\cos(x+z)dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{2}$. .... $\left[\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right]$.

23. $\iiint\limits_A xyzdxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$, pričom $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. ..... $\left[\frac{1}{48}\right]$.

24. $\iiint\limits_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$. .... $\left[\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)\right]$.

25. $\iiint\limits_A x^2yz^3dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy\}$. .... $\left[\frac{1}{312}\right]$.

26. $\iiint\limits_A \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2}dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 5,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$. .... $\left[\dfrac{425}{78}+\dfrac{1}{16}\ln 26=5,652349\right]$.

27. Vypočítajte plošný obsah množiny A, ak je ohraničená krivkami: $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ a $x^2+y^2=4$. Nakreslite obrázok množiny A...... $\left[\pi-\frac{4}{3}\right]$.

28. Vypočítajme objem telesa A ohraničeného rovinami $x+y+z=4,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$. Nakreslite obrázok množiny A.

$\left[\frac{55}{6}\right]$.

4.6 Transformácie integrálu

Veta 4.10 *(Transformácia pomocou polárnych súradníc) Nech* $Z = \langle 0, \infty) \times \langle -\pi, \pi \rangle$. *Nech*

$$g : \mathbb{R}^2 \supset Z \to \mathbb{R}^2,\ g(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi), \quad J_g(\varrho, \varphi) = \varrho.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^2$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_B f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) |J_g(\varrho, \varphi)|\, d\varrho d\varphi.$$

Veta 4.11 *(Transformácia pomocou cylindrických súradníc) Nech* $Z = \langle 0, \infty) \times \langle -\pi, \pi \rangle \times (-\infty, \infty)$. *Nech*

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \to \mathbb{R}^3,\ g(\varrho, \varphi, u) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, u), \quad J_g(\varrho, \varphi, u) = \varrho.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_B f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, u) |J_g(\varrho, \varphi, u)|\, d\varrho d\varphi du.$$

Veta 4.12 *(Transformácia pomocou sférických súradníc) Nech* $Z = \langle 0, \infty) \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. *Nech*

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \to \mathbb{R}^3,\ g(\varrho, \varphi, \vartheta) = (\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta), \quad J_g(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho^2 \cos \vartheta.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_B f(\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) |J_g(\varrho, \varphi, \vartheta)|\, d\varrho d\varphi d\vartheta.$$

Veta 4.13 *(Transformácia pomocou afinných súradníc) Nech*

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g(u,v,w) = (a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w, a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w, a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w).$

Nech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad a \quad J_g(u,v,w) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nech

1. $J_g(u,v,w) \neq 0$,
2. $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že* $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_A f(x,y,z)\, dxdydz = \\ &= \iiint\limits_B f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + \\ &+ a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w)|J_g(u,v,w)|\, dudvdw. \end{aligned}$$

4.6.1 Príklady

1. Vypočítajme $\iint\limits_A \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... $\left[\frac{\pi}{6}\right]$.
2. Vypočítajme $\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$. $\left[\frac{16\pi}{3}\right]$.
3. Vypočítajme $\iint\limits_A 2(x^2+y^2)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge |x|\}$. .... $\left[\frac{15\pi}{4}\right]$.
4. Vypočítajme $\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x\}$. $\left[\frac{32}{9}\right]$.
5. Vypočítajme $\iint\limits_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... $\left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}\right]$.
6. Vypočítajme $\iint\limits_A \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... $\left[(10\ln 10 - 9)\frac{\pi}{4}\right]$.

7. Vypočítajme $\iint\limits_A \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le e\}$. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

8. Vypočítajme $\iint\limits_A \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$. .... $\left[-6\pi^2\right]$.

9. Vypočítajme $\iint\limits_A \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}\}$. .... $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

10. Vypočítajme $\iint\limits_A \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\, dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1\}$. $[4\pi]$.

11. Vypočítajme $\iint\limits_A xy^2\, dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 2y \le x^2+y^2 \le 4y\}$. $[0]$.

12. Vypočítajme $\iiint\limits_A y\, dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2+z^2=y^2,\ y=2$. .... $[4\pi]$.

13. Vypočítajme $\iiint\limits_A (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochou $3(x^2+y^2)+z^2=3$. .... $\left[\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\right]$.

14. Vypočítajme $\iiint\limits_A (x^2+y^2) dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2=2z,\ z=2$. .... $\left[\frac{16\pi}{3}\right]$.

15. Vypočítajme $\iiint\limits_A \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0,\ z=1$ a leží v prvom oktante. ... $\left[\frac{4}{9}\right]$.

16. Vypočítajme $\iiint\limits_A (x^2+y^2)\, dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge 0\}$. .... $\left[\frac{844\pi}{15}\right]$.

17. Vypočítajme $\iiint\limits_A z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 2x,\ 0 \le z \le 4,\ 0 \le y\}$. .... $\left[\frac{128}{9}\right]$.

18. Vypočítajme $\iiint\limits_A x^2y dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ z=0,\ x+z=3$. .... $[0]$.

19. Vypočítajme $\iiint\limits_A xy\sqrt{z} dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0,\ z=1$, pričom $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. $\left[\frac{4}{11}\right]$.

20. Vypočítajme $\iiint\limits_A z\ dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $z = 2,\ z^2 = 4(x^2+y^2)$. .... $[\pi]$.

21. Vypočítajme $\iiint\limits_A \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2}dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 5,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... $\left[\dfrac{425}{78} + \dfrac{1}{16}\ln 26 = 5,652349\right]$.

22. $\iiint\limits_A zdxdydz$, ak množina $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 2,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... $\left[\frac{\pi}{8}\right]$.

23. Vypočítajme $\iiint\limits_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le z\}$. .... $\left[\frac{\pi}{10}\right]$.

24. Vypočítajme $\iiint\limits_A z^2dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2+z^2 \le 4z\}$. .... $\left[\frac{59}{15}\pi\right]$.

25. Vypočítajme $\iiint\limits_A (x+y+z)\ dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 12,\ x^2+y^2 \le 4z\}$. .... $\left[\frac{80}{3}\pi\right]$.

26. Vypočítajme $\iiint\limits_A (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 0 \le z\}$. .... $\left[\frac{32\pi(2-\sqrt{2})}{5}\right]$.

27. Vypočítajme $\iiint\limits_A \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}}\ dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25} \le 1\}$. .... $\left[\frac{15\pi^2}{2}\right]$.

28. Vypočítajme $\iiint\limits_A x^2yz\ dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid 4x^2+y^2+z^2 \le 1\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0\}$. .... $\left[\frac{-1}{840}\right]$.

29. Vypočítajte plošný obsah množiny A, keď $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x,\ 0 \le y \le x\}$. .... $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]$.

30. Vypočítajme objem:

    (a) Kužeľa $A = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$. (Použite transformáciu polárnymi súradnicami.) .... $\left[\frac{8}{3}\pi\right]$.

    (b) Telesa $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le 4-(x^2+y^2)\}$. ..... $[4\pi]$

    (c) Telesa A, ktoré je ohraničené rovinami $2x-y+z-3=0,\ 2x-y+z=0,\ x+y+z-5=0,\ x+y+z=0, x+2y+2z-4=0,\ x+2y+2z=0$. .... $[30]$.

(d) Elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. .... $[32\pi]$.

(e) Telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 6z \leq 0,\ x^2 + y^2 < \frac{z^2}{3}\}$. $\left[\frac{63\pi}{4}\right]$.

(f) Telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq y^2\}$. .... $\left[\frac{\pi}{4}\right]$.

(g) Telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2x,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. $\left[\frac{16(3\pi-4)}{9}\right]$.

(h) Telesa A ohraničeného paraboloidom $z = 6 - x^2 - y^2$ a kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. .... $\left[\frac{32\pi}{3}\right]$.

(i) Telesa A ohraničeného paraboloidom $2z = x^2 + y^2$ a kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. .... $\left[\frac{4\pi}{3}\right]$.

(j) Telesa A ohraničeného rovinou $z = 0$, valcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x$ a paraboloidom $x^2 + y^2 = z - 2$. .... $\left[\frac{7\pi}{2}\right]$.

(k) Telesa A ohraničeného rovinou $z = 0$, valcovou plochou $x^2 + y^2 = 4x$ a guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, pričom $z \geq 0$. $\left[\frac{4^3}{3}(\pi - \frac{4}{3})\right]$.

(l) Telesa A ohraničeného paraboloidom $x^2 + y^2 = 4z$ a guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. .... $\left[\frac{8}{3}\pi(-5 + 3\sqrt{3})\right]$.

(m) Telesa A ohraničeného guľovou plochou $x^2+y^2+z^2 = 16$ a guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$. .... $\left[\frac{80\pi}{3}\right]$.