Taylorov rad funkcie

Nech funkcia f je $(n+1)$-krát diferencovateľná na $O_\delta(a)$. Potom $\exists c \in O_\delta(a)$ $\forall x \in O_\delta(a)$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

$T_n(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ sa nazýva Taylorov polynóm stupňa n,

$R_n(x,a) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$ sa nazýva zvyšok Taylorovho polynómu.

Definícia. *Nech funkcia $f\colon A \to R$ má v bode $a \in A$ derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad*

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

sa nazýva Taylorov rad funkcie so stredom v bode a.

Veta. *Nech funkcia f má na intervale $(a-\varrho, a+\varrho)$ derivácie všetkých rádov. Potom $\forall x \in (a-\varrho, a+\varrho)\colon f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ práve vtedy, keď*
$\forall x \in (a-\varrho, a+\varrho)\colon \lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0.$

$$\forall x \in R\colon \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in R\colon \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in R\colon \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Veta (o jednoznačnosti Taylorovho radu).
Nech $\forall x \in (a-\varrho, a+\varrho)\colon f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Potom $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.