

1. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

- Nájdite výsledok operácie v tvare $x+yi$, kde $x, y \in R$.
 - $3+7i-(5-2i)(4-i)$
 - $i(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$
 - $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
 - $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$
 - $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
- Nájdite $x, y \in R$ také, e
 - $(2x+3y)+i(x-y)=-1+2i$
 - $(ix+y)(2x-3iy)=2i$
 - $\frac{-y+ix}{1-2i}+\frac{x+iy}{2+3i}=1$
- Dané komplexné číslo znázorníte a nájdite jeho gonio-
metrický tvar.
 - -5
 - $1-i$
 - $\sqrt{3}-i$
 - $-5i$
 - $-2-2i$
 - $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Vypočítajte $zu, \frac{z}{u}, z^n$.
 - $z = \sqrt{3}(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5})$, $u = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$, $n = 5$
 - $z = 3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $u = 6(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})$, $n = 2004$
- V obore komplexných čísel riešte rovnicu.
 - $z^4 = 4$
 - $z^4 = -4$
 - $z^3 = -8i$
 - $z^2 = -2-2\sqrt{3}i$
 - $z^2 = 2i$
 - $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Vypočítajte.
 - i^{101}, i^{-39}
 - $(1+i)^4$
 - $(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})^8$
 - $(\sqrt{3}-i)^3$
 - $(-1-\sqrt{3}i)^6$

Výsledky

- a) $-15+20i$, b) $10i$, c) $-\frac{19}{13}-\frac{17}{13}i$,
d) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$, e) $\frac{1}{34} + \frac{21}{34}i$
- a) $x=1, y=-1$, b) $x=\pm 1, y=0$, c) $x=-4$,
 $y=\frac{1}{2}$
- a) $5(\cos \pi + i \sin \pi)$, b) $\sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$,
c) $2(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$, d) $5(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$,
e) $2\sqrt{2}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$
f) $\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$

- a) $2\sqrt{3}(\cos \frac{26}{15}\pi + i \sin \frac{26}{15}\pi)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{16}{15}\pi + i \sin \frac{16}{15}\pi)$,
 $-9\sqrt{3}$
b) $18(\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi)$, $\frac{1}{2}(\cos \frac{1}{8}\pi - i \sin \frac{1}{8}\pi)$, -3^{2004}
- a) $z_k = \sqrt{2}(\cos k\frac{\pi}{2} + i \sin k\frac{\pi}{2})$, $k=0,1,2,3$.
b) $z_k = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}))$, $k=0,1,2,3$.
c) $z_k = 2(\cos(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}))$, $k=0,1,2$.
d) $z_0 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$.
e) $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1 - i$.
f) $z_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, $z_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$.
- a) i , b) -4 , c) 1 , d) $8i$, e) 64 .

2. POLYNÓMY

- Určte stupeň polynómu $f(x)$
 - $f(x) = 1 + x + ix$
 - $f(x) = 3x + 2 - 5x^3$
 - $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, $n \in N$.
- Vynásobte a nájdite stupeň súčinu $f(x) \cdot g(x)$
 - $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - 1$
 - $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = (x - i)$
- Del'te (určte podiel a zvyšok).
 - $(x^4 + 1) : (x - 1)$,
 - $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$
 - $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$
- Daný polynóm rozložte na súčin mocnín ireducibilných
polynómov nad R a nad C .
 - $2x^2 - x - 1$
 - $2x^2 - x + 1$
 - $3x^3 - x^2 + 3x - 1$
 - $x^4 + 4$
 - $2x^3 - x - 1$
 - $2x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x - 4$
 - $4x^5 - 4x^4 - 19x^3 - 13x^2 - 5x - 3$
- Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte hodnotu
 $f(c)$, ak
 - $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$
 - $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2$, $c = -\frac{1}{3}$
 - $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$, $c = -2-i$
- Nájdite takú hodnotu parametra a , že c bude kore-
ňom polynómu $f(x)$.
 - $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2$, $c = 3$
 - $f(x) = 2x^6 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a$, $c = -1$
- Nájdite násobnosť koreňa c polynómu $f(x)$.
 - $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8$, $c = 2$
 - $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $c = 2$
 - $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $c = -2$
 - $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1$, $c = i$
- Nájdite všetky racionálne korene polynómu
 - $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3$
 - $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$

- c. $9x^4 - 21x^3 + x^2 + 9x + 2$
 d. $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

9. Nájdite všetky korene polynómu.

- a. $x^4 - 30x^2 + 289$
 b. $x^3 + i$
 c. $x^8 - 16$

Výsledky

- a) 1, b) 3, c) n
- a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$, 5, b) $x^4 - ix^3 + x^2 + (1-i)x - i$, 4
- a) $(x^4 + 1) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 2$, (zv. 2)
 b) $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$, (zv. 0),
 c) $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)(x + 1)$, (zv. 0)
- Nad R :
 a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2x^2 - x + 1$, c) $(x^2 + 1)(3x - 1)$,
 d) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$, e) $(2x^2 + 2x + 1)(x - 1)$,
 f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x^2 + 4)$, g) $4(x+1)^2(x-3)(x^2 + \frac{1}{4})$
 nad C :
 a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{4})(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{4})$,
 c) $(x+i)(x-i)(3x-1)$,
 d) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$,
 e) $2(x-1)(x+\frac{1+i}{2})(x+\frac{1-i}{2})$,
 f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2i)(x-2i)$,
 f) $4(x+1)^2(x-3)(x+\frac{1}{2}i)(x-\frac{1}{2}i)$
- a) 136, b) 1, c) $-1 - 44i$
- a) $\frac{47}{3}$, b) -1
- a) 2, b) 3, c) 4, d) 3,
- a) $1, 1, -\frac{3}{2}$, b) $-\frac{2}{3}, 2$, c) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 2$,
 d) $-1, -1, -1, -1, 3$
- a) $\pm 4 \pm i$, b) $i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, c) $\pm \sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}, \pm 1 \pm i$

3. RACIONÁLNE FUNKCIE

1. Napíšte, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad R .

- a. $\frac{2x+1}{x^2+5x+6}$
 b. $\frac{2x+1}{(x^2+4x+5)^n}$, $n \in \mathbb{N}$

- c. $\frac{2x+1}{(x-2)^2}$ d. $\frac{1}{(x-2)^2}$

2. Rozložte rýdzdo racionálnu funkciu na elementárne zlomky nad R , nad C .

- a. $\frac{x^2 - 6x + 3}{(x+1)(x^2+9)}$ b. $\frac{2x^2 - 9x + 5}{(x-2)(x^2+x-6)}$
 c. $\frac{x^2}{(x-3)^3}$ d. $\frac{2x+3}{x^2+2x+2}$

3. Danú racionálnu funkciu napíšte v tvare súčtu polynómu a elementárnych zlomkov nad R aj nad C .

- a. $\frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 - 2}$
 b. $\frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
 c. $\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}{3x^3 - 12x^2 + 12x - 1}$
 d. $\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}{2x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$
 e. $\frac{(x^2 + 2x + 2)^2}{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 5x + 4}$
 f. $\frac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 5x + 4}{(x-3)(x^2+2x+2)^2}$

4. Napíšte tvar rozkladu danej racionálnej funkcie na súčet elementárnych zlomkov nad R , nad C .

- a. $\frac{f(x)}{(2x+1)^3(x-1)^2(2x^2-2x+1)}$, $\text{st } f(x) = 6$
 b. $\frac{x}{(x^2+1)^3(x^2-1)^3}$

Výsledky

- a) $D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0 \implies$ nie je,
 b) $D = -4 < 0$, $\text{st}(2x+1) = 1 \implies$ áno, c) nie je,
 d) áno
- a) $\frac{1}{x+1} - \frac{6}{x^2+9}$ — nad R , $\frac{1}{x+1} + \frac{i}{x-3i} - \frac{i}{x+3i}$ — nad C
 b) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x-2)^2}$ — nad R , nad C ,
 c) $\frac{1}{x-3} + \frac{6}{(x-3)^2} + \frac{9}{(x-3)^3}$ — nad R , nad C
 d) $\frac{1+(i/2)}{x+1+i} + \frac{1-(i/2)}{x+1-i}$ nad C
- a) $(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ — nad R
 $(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{(1/2)}{x+1+i} + \frac{(1/2)}{x+1-i}$ — nad C

- b) $\frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{x+1}$, c) $\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$
d) $\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2}$, e) $\frac{2x+3}{x^2+2x+2} + \frac{4x+2}{(x^2+2x+2)^2}$
— nad R
 $\frac{1}{x+1+i} + \frac{\frac{1}{2}+i}{(x+1+i)^2} + \frac{1}{x+1-i} + \frac{\frac{1}{2}-i}{(x+1-i)^2}$ — nad C
f) $\frac{1}{x-3} + \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}$ — nad R ,
 $\frac{\frac{4}{x-1-i}}{x+1-i} - \frac{\frac{4}{x+1+i}}{x+1+i} + \frac{\frac{1-i}{4}}{(x+1-i)^2} + \frac{\frac{1+i}{4}}{(x+1+i)^2}$ — nad C
4. a) nad R : $\frac{a}{(2x+1)^3} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{2x^2-2x+1}$, $a, b, c, d, e, f, g \in R$
nad C :
 $\frac{a}{(2x+1)^3} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x-(1+i)/2} + \frac{g}{x-(1-i)/2}$, $a, b, c, d, e, f, g \in C$
b) nad R
 $\frac{ax+b}{(x^2+1)^3} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1} + \frac{g}{(x-1)^3} + \frac{h}{(x-1)^2} + \frac{k}{x-1} + \frac{l}{(x+1)^3} + \frac{m}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$, $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in R$
Nad C : $\frac{a}{(x+i)^3} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x+i} + \frac{d}{(x-i)^3} + \frac{e}{(x-i)^2} + \frac{f}{x-i} + \frac{g}{(x-1)^3} + \frac{h}{(x-1)^2} + \frac{k}{x-1} + \frac{l}{(x+1)^3} + \frac{m}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$,
 $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in C$

4. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍČ

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

a. $x_1 + 2x_2 = -3$ b. $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$
 $3x_2 = -6$ $-3x_2 + x_3 = -3$
 $7x_3 = 21$

c. $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$ d. $2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4$
 $-x_2 + x_3 = i$ $x_2 - x_3 = 2$
 $2x_3 = 2 + 2i$

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc a množinu všetkých jej riešení, ak jej rozšírená matica je

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$
c. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1+i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 2 & i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1+i & 1+i \end{array}\right)$ d. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$
e. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ f. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

3. Rozhodnite, či je daná matica stupňovitá.

a. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc

a. $x_1 - x_2 = -2$ b. $12x_1 - x_2 + 5x_3 = 30$
 $-3x_1 + 2x_2 = 3$ $3x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 21$
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$

c. $7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$
 $-x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2$
 $-10x_1 + 15x_2 - 11x_3 = 4$

d. $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 1$
 $x_1 - x_2 + x_3 = 2$
 $4x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$

e. $3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2$
 $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12$
 $4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1$
 $5x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 5$

f. $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1$
 $2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2$
 $2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$
 $-6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$

g. $2x_1 + (2-i)x_2 = 9$
 $-x_1 + x_2 = i$

h. $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 + i$
 $x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 14 - 3i$
 $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 - 2i$

5. Riešte dva systémy s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici 3×5 .

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$ $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9$
 $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$ $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$
 $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$ $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2$

6. Riešte homogénne sústavy lineárnych rovníc

a. $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
 $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
b. $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
 $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Výsledky

1. a) $(1, -2)$, b) $(1, 2, 3)$, c) $(-i, 1, 1 + i)$
d) $\{(-3 + a, 2 + a, a) : a \in R\}$
2. a) $\{(2 + p, p, 0, -1) : p \in R\}$, b) $\emptyset$,
c) $(-1 - 2i, -1 + 2i, 1 + i)$, d) $\{(a, -2, 0, -1) : a \in R\}$,
e) $\{(1 + b - a, b, 0, a) : a, b \in R\}$,
f) $\{(\frac{1+p-q}{2}, 1 - p, p, q) : p, q \in R\}$
3. a) áno, b) nie, c) áno

4. a) $(1, 3)$, b) $(2, -1, 1)$, c) $(\frac{1}{60}, \frac{83}{180}, \frac{1}{4})$
 d) $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$, e) $(0, 2, \frac{1}{3} - \frac{3}{2})$, f) $\emptyset$, g) $(2, 2 + i)$,
 h) $(i, -i, 2)$
 5. $(-1, 2, 1)$, $(3, 1, -2)$
 6. a) $\{a(-2, 4, 1, 5) : a \in R\}$, b) $\{(0, 0, 0, 0)\}$

5. MATICOVÉ OPERÁCIE

1. Vypočítajte $2A$, $A + B$, AB , BA (ak existujú) pre matice:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

2. K danej matici nájdite inverznú maticu.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ h. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ k. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Výsledky

1. a) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $AB \nexists$, $BA \nexists$

b) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$A + B \nexists$, $BA \nexists$

d) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$A + B \nexists$, $BA \nexists$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\nexists$,

d) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, e) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, g) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

6. DETERMINANTY

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} a-2 & a+2 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$

2. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vypočítajte hodnoty $\det A_{31}$, $\det A_{32}$, $\det A_{33}$, kde A_{ij} je matica, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadku R_i a stĺpca S_j .

(b) Vypočítajte hodnoty algebraických doplnkov $\tilde{a}_{31}$, $\tilde{a}_{32}$, $\tilde{a}_{33}$.

(c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte $\det A$

3. Platí tvrdenie: Ak $A, B \in C^{3 \times 3}$, tak $\det(A + B) = \det A + \det B$? Svoje tvrdenie odôvodnite.

4. Napíšte hodnotu determinantu

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5. Vypočítajte determinanty

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}, \text{ b. } \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}, \text{ c. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \text{ e. } \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

6. Vypočítajte determinanty matíc stupňa $n, n > 1$

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d. } \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Zistite aká je dimenzia podpriestoru $M \subset R^4$ tak, že ho vyjadrite ako lineárny obal lineárne nezávislej množiny.

$$\text{a. } M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\text{b. } M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0\}.$$

Výsledky

1. a) -4 , b) 0 , c) $1 + 3i$, d) 4 , e) $4(a - b)$, f) 1
2. a) 11 , b) -4 , c) -3
3. Nie. Návod na odôvodnenie: nájdite maticu $A \in C^{3 \times 3}$, pre ktorú $\det 2A \neq 2 \det A$.
4. a) 0 , b) 0 , c) -25 , d) 45 , e) -15 , f) 1 .
5. a) 0 , b) $(ad - bc)^2$, c) -48 , d) -4 , e) 19×6^4
6. a) $(-1)^{n+1}n$, b) $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

7. LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ
A NEZÁVISLOSŤ V C^n

1. Rozhodnite, či sú nasledujúce podmnožiny C^3 lineárne nezávislé, tie ktoré sú nezávislé doplňte na bázu C^3 .
 - a. $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$,
 - b. $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (0, 0, 2)\}$,
 - c. $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$,
2. Zistite, či $\mathbf{b}$ je lineárnou kombináciou prvkov množiny $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ak
 - a. $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 2)$.
 - b. $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)$.
 - c. $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$.
3. Určte hodnotu matice:
 - a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

Výsledky

1. a) nezávislá, b) závislá, c) nezávislá
2. a) nie je, b) je, c) je,
3. a) 2 , b) 3 , c) 4 , d) 3 , e) 2
- 4a. $M = \{(-2a + b - c, a, b, c) : a, b, c \in R\} = \text{Lo}\{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$, $\dim M = 3$.
- b. $M = \text{Lo}\{(-2, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 1)\}$, $\dim M = 2$.

8. VEKTORY V 3-ROZMERNOM PRIESTORE.

1. Vypočítajte skalárny súčin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a zistite, či je ich uhol α ostrý, tupý alebo pravý.
 - a. $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - b. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - c. $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
2. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$ a nájdite zložku kolmú na $\mathbf{v}$.
 - a. $\mathbf{u} = (3, -5, 2)$, $\mathbf{v} = (-3, 0, 4)$,
 - b. $\mathbf{u} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$
3. Ukážte, že $A = (2, -1, 1)$, $B = (3, 2, -1)$ a $C = (7, 0, -2)$ sú vrcholy pravoúhleho trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah P_{ABC} .
4. Vypočítajte $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
 - a. $\mathbf{u} = (1, -2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.
 - b. $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, -2, -6)$
5. Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na $\mathbf{u}$ aj na $\mathbf{v}$.
 - a. $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$
 - b. $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$
6. Nájdite obsah trojuholníka ABC .
 - a. $A = (2, 0, 1)$, $B = (3, -1, 2)$, $C = (-3, 4, 2)$
 - b. $A = (1, 3, 2)$, $B = (5, 3, 1)$, $C = (-3, 1, 2)$

7. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
- a) $A = (-2, 3, 1)$, $B = (1, -2, 3)$,
 $C = (2, 1, 0)$, $D = (3, 2, 1)$
- b) $A = (-1, 4, 2)$, $B = (2, 3, 4)$,
 $C = (0, 4, 2)$, $D = (3, 6, 3)$
8. Vypočítajte $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, ak
- a. $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 2$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je 60°
- b. $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = 8$ a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 24$
9. Vypočítajte $\|(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 3\mathbf{b})\|$, ak
- a. $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 1$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $\frac{\pi}{6}$,
- b. $\|\mathbf{a}\| = 2$, $\|\mathbf{b}\| = 3$ a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3\sqrt{3}$
- a. $p: x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t, t \in R$;
 $\rho: 3x + 2y + 5z - 7 = 0$
- b. $p: x = t, y = 2t, z = 2t, t \in R$; $\rho: 2x + 4y - 5z + 3 = 0$
5. Rozhodnite, či sú priamka p a rovina ρ kolmé.
- a. $p: x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t, t \in R$;
 $\rho: -4x + 2y + 8z + 3 = 0$
- b. $p: x = 4 + 3t, y = 1 - 2t, z = -1 + 4t, t \in R$;
 $\rho: x - 5y + 2z - 7 = 0$
6. Nájdite parametrické rovnice priamky p , ktorá je priesečnicou rovín
- a) $\rho_1: -2x + 3y + 7z + 2 = 0$, $\rho_2: x + 2y - 3z + 5 = 0$
- b) $\rho_1: 3x - 5y + 2z = 0$, $\rho_2: x + z = 0$
7. Nájdite rovnicu roviny prechádzajúcej cez bod $(-1, 4, -3)$, ktorá je kolmá na priamku $x = 2 + t, y = -3 + 2t, z = -t, t \in R$.
8. Nájdite rovnicu roviny ρ prechádzajúcej cez bod $(-1, 2, 4)$, ktorá je rovnobežná s rovinou xy , b. xz , c. $x + y + z + 1 = 0$.
9. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod $(-1, 4, 2)$, ktorá obsahuje priesečnicu rovín $4x - y + z - 2 = 0$ a $2x + y - 2z - 3 = 0$.
10. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov $(2, -1, 1)$ a $(3, 1, 5)$.
11. Nájdite priesečník priamok
- a. $p: x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1, t \in R$ a
 $q: x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 2 + 3t, t \in R$.
- b. $p: x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1, t \in R$ a
 $q: x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 1 + 3t, t \in R$.

Výsledky

1. a) 0, pravý, b) -1 , tupý, c) 3, ostrý
2. a) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\frac{1}{25}(-3, 0, 4)$, $(3, -5, 2) + \frac{1}{25}(-3, 0, 4)$,
b) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $(-1, 2, 1) - \frac{1}{3}(2, 2, 1)$.
3. Pri vrchole B . $P_{ABC} = \frac{7\sqrt{6}}{2}$.
- 4a) $(-1, -1, 1)$, b) $(0, 0, 0)$
- 5a) $\frac{\pm 1}{\sqrt{26}}(4, -1, 3)$, b) $\frac{\pm 1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$
- 6a) $\frac{1}{2}\sqrt{62}$, b) $\sqrt{21}$.
- 7a) 34, b) 5
- 8a) $3\sqrt{3}$, b) 32
- 9a) 15, b) 30

9. PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorá prechádza bodom P .
- a. $P = (1, 2, 3)$, $\mathbf{n} = (2, -3, 1)$
- b. $P = (-2, 3, 5)$, $\mathbf{n} = (3, 7, -2)$
2. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A, B, C .
- a. $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 3)$, $C = (-2, 1, 1)$
- b. $A = (-1, 3, 2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (3, 2, 1)$
3. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.
- a. $2x - y + 3z + 3 = 0$, $-4x + 2y + 9z + 1 = 0$
- b. $-x + 3y + 2z + 1 = 0$, $2x - 6y - 4z + 5 = 0$
4. Rozhodnite, či priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.
- 1a) $2x - 3y + z + 1 = 0$, b) $3x + 7y - 2z - 5 = 0$.
- 2a) $2y - z - 1 = 0$, b) $x + 9y - 5z - 16 = 0$.
- 3a) rôznobežné, b) rovnobežné.
- 4a) nie, b) áno $p \parallel \rho$.
- 5a) áno, $p \perp \rho$, b) nie.
- 6a) $p: x = -41 - 23t, y = t, z = -12 - 7t, t \in R$,
b) $p: x = 5t, y = t, z = -5t, t \in R$.
7. $\rho: (x + 1) + 2(y - 4) - (z + 3) = 0$
- 8a) $\rho: z = 4$, b) $\rho: y = 2$,
c) $\rho: (x + 1) + (y - 2) + (z - 4) = 0$.
9. $4x - 13y + 21z - 14 = 0$.
10. $(x - \frac{5}{2}) + y + 4(z - 3) = 0$
- 11a) $p \cap q = (-17, -1, 1)$, b) $p \cap q = \emptyset$.

Výsledky