

FUNKCIE ($D(f)$, f^{-1} , $g \circ f$)

1. Určte definičný obor funkcií.

$$f_1(x) = \ln(\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x})$$

$$f_2(x) = \sqrt{2 \cos x - \sqrt{3}}$$

$$f_3(x) = \arccos\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

$$f_4(x) = \frac{x}{\ln(x^2 - 1)}$$

$$f_5(x) = \frac{x}{\ln(3-x)} + \ln(4x - x^2)$$

$$f_6(x) = \sqrt{\arcsin(x-3)}$$

$$f_7(x) = \frac{x+2}{\sqrt{|x|-2}}$$

$$f_8(x) = \frac{\ln(2-x)}{e^x - 1}$$

2. Určte definičný obor funkcie a zistite, či je f párna alebo nepárna.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{b) } f(x) = \frac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$$

$$\text{c) } f(x) = \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \text{d) } f(x) = \frac{\ln x^2}{\sqrt{x-2}}$$

$$\text{e) } f(x) = \arccos(3 - |x|)$$

3. Určte $D(f)$ a nájdite inverznú funkciu k funkcii f .

$$\text{a) } f(x) = \pi + \arcsin(2x+1)$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$$

4. Dané sú funkcie f a g . Určte definičné obory a obory hodnôt funkcií f a g . Nájdite také zúženie funkcie f , aby existovala zložená funkcia $g \circ f|_A$ a určte ju.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = \ln(x-2).$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 - x - 1, \quad g(x) = \arccos x.$$

Výsledky

1. $D(f_1) = (3, 4)$, $D(f_2) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rangle$, $D(f_3) = (-\infty, -\frac{1}{2})$, $D(f_4) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, $D(f_5) = (0, 2) \cup (2, 3)$, $D(f_6) = \langle 3, 4 \rangle$, $D(f_7) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, $D(f_8) = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$.

2.a) $D(f) = (-2, 2)$, nepárna, 2.b) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, párna. 2.c) $D(f) = (-1, 1)$, nepárna, 2.d) $D(f) = (0, 4) \cup (4, \infty)$, nie je párna ani nepárna, 2.e) $D(f) = \langle -4, -2 \rangle \cup (2, 4)$ párna.

3.a) $D(f) = \langle -1, 0 \rangle$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(-\sin x - 1)$,

3.b) $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$, $f^{-1}(x) = e^{x^2} - 1$.

4.a) $A = (-\infty, -\frac{1}{2})$, $(g \circ f|_A)(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2}$,

4. b) $A = (-2, -1)$, $(g \circ f|_A)(x) = \ln\left(\frac{-x-2}{x+1}\right)$,

4. c) $A = \langle -1, 0 \rangle \cup (1, 2)$, $(g \circ f|_A)(x) = \arccos(x^2 - x - 1)$.

LIMITY FUNKCIÍ

1. Určte definičný obor funkcie, vypočítajte jednostranné limity funkcie v bode a , rozhodnite, či existuje limita funkcie v bode a .

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad a = -1$$

$$\text{b) } f(x) = \ln(x^2), \quad a = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad a = 0$$

$$\text{d) } f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x-3}\right), \quad a = 3$$

2. Vypočítajte limity v krajných bodoch definičného oboru a načrtnite graf funkcie.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)}$$

3. Vypočítajte limity funkcií.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{x-\pi} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\tg 2x}$$

4. Vypočítajte nevlastné limity funkcií.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-2x^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2+2x+3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 2x}{x^2-1} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x+3}} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{3x-1}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x-3})$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x})$$

Výsledky

1a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$, $\nexists$,

1b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\exists$,

1c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\nexists$,

1d) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\nexists$.

2a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1/2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1/2$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$,

2b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,

2c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, 3a) $-1/3$, 3b) $\frac{1}{20}$, 3c) -3 , 3d) 0 ,

4a) $-\infty$, 4b) 0 , 4c) 0 , 4d) 0 , 4e) ∞ , 4f) $\frac{2}{3}$, 4g) ∞ , 4h) 0 .

SPOJITOSŤ FUNKCIÍ

1. Vyšetrite spojitosť funkcie $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} & x \neq 1 \\ 6 & x = 1, \end{cases}$

2. Zistite, či je funkcia $f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\cos^3 x - \cos x}{x^2} & x > 0. \end{cases}$

spojitá v bode $a = 0$.

3. Určte parameter p tak, aby funkcia $f: (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{2x} & x \neq 0 \\ p & x = 0 \end{cases} \text{ bola spojitá v bode } 0.$$

4. Určte definičný obor a nájdite maximálne spojitú rozšírenie funkcie $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}$.

Výsledky

1. f je spojitá na $R \setminus \{1\}$, 2. f nie je spojitá v bode 0, 3. $p = \frac{3}{2}$,
4. $\tilde{f}: R \rightarrow R$, $\tilde{f}(x) = \frac{x-3}{x^2-x+1}$.

DERIVÁCIE FUNKCIÍ

1. Zistite $D(f)$, množinu bodov, v ktorých je f spojitá a množinu bodov, v ktorých $\exists$ derivácia f . Vypočítajte f' .

a) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

b) $f(x) = \frac{2-3x}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}$

d) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x \ln x$

e) $f(x) = \frac{(x+1)e^x}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 35}$

g) $f(x) = \arctg \sqrt{x^2 + 4}$

h) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$

i) $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x}}$

j) $f(x) = e^{\cos x} + \ln(\ln(2x + 1))$

k) $f(x) = (x-1)e^{1-x^3} + \ln^3 \left(\frac{1}{x^2 + 3x + 4} \right)$.

2. Nech $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \begin{cases} x \arctg \frac{1}{x} & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$.

Zistite, či je funkcia f

a) spojitá v bode $x = 0$,

b) diferencovateľná v bode $x = 0$.

3. Nájdite deriváciu funkcie $f(x) = \ln|1-x|$ a načrtnite graf f a f' .

4. Nájdite rovnicu dotýčnice a normály ku grafu funkcie v bode $(a, f(a))$.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$, $a = 3$.

b) $f(x) = e^{-x} \cos 2x$, $a = 0$.

c) $f(x) = e^{x^2} \ln(1-x)$, $a = 0$.

Výsledky

1a) $D(f) = D(f') = (0, \infty)$, $f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$,

1b) $D(f) = D(f') = R \setminus \{0\}$, $f'(x) = \frac{6(x-1)}{x^4}$,

1c) $D(f) = D(f') = R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$, $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$,

1d) $D(f) = D(f') = (0, \infty)$, $f'(x) = e^x [(x^2 - 2) \ln x + x - 2]$,

1e) $D(f) = D(f') = R \setminus \{0\}$, $f'(x) = \frac{e^x(x^2+x-1)}{x^2}$,

1f) $D(f) = (-\infty, -7) \cup (5, \infty)$, $D(f') = (-\infty, -7) \cup (5, \infty)$, $f'(x) =$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-35}},$$

1g) $D(f) = D(f') = R$, $f'(x) = \frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+4}}$,

1h) $D(f) = D(f') = (0, \infty)$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$,

1i) $D(f) = D(f') = (0, \infty)$, $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{2x\sqrt{x}}$.

1j) $D(f) = D(f') = (0, \infty)$,

$$f'(x) = -\sin x e^{\cos x} + \frac{2}{(2x+1)\ln(2x+1)},$$

1k) $D(f) = D(f') = R$,

$$f'(x) = e^{1-x^3} (1+3x^2-3x^3) - 3(2x+3)\ln^2(x^2+3x+4).$$

2. f je spojitá v bode 0, nie je diferencovateľná v 0.

3. $D(f) = D(f') = R \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{1}{x-1}$.

4a) $t: y-2 = -(x-3)$, $n: y-2 = (x-3)$,

b) $t: y-1 = -x$, $n: y-1 = x$, c) $t: y = -x$, $n: y = x$.

PRIEBEH FUNKCIE

1. Vyšetrite monotónnosť a nájdite lokálne extrémny funkcie.

a) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 9$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$

c) $f(x) = e^{(x^2+1)}$

d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

2. Nájdite asymptoty funkcie.

a) $f(x) = x - \arctg x$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

c) $f(x) = (x+3)e^{-x-1}$

d) $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{2x}$

3. Použitím L'Hospitalovho pravidla vypočítajte limity.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^4 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 3}{e^x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x - \cos x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x}{\ln(1 - x^2)}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin 3x - 1}{e^{2x} - \cos x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x+1)}{\ln(x^2+1)}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - xe^{-x}}{e^x - x - 1}$

4. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x - \frac{1}{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cotg^2 x}$

5. Vyšetrite priebeh funkcie a načrtnite jej graf ($D(f)$, nulové body, spojitost, párnosť, nepárnosť, periodičnosť, asymptoty, intervaly monotónnosti, konvexnosti a konkávnosti, lokálne extrémny, inflexné body, graf obor hodnot)

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

c) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) &= \frac{1}{1-x^2} & \text{f) } f(x) &= \frac{e^x}{x+1} \\ \text{g) } f(x) &= x - 2\arctg x & \text{h) } f(x) &= (x+2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Výsledky

1a) na $(-\infty, -3)$ a $(0, 3)$ klesajúca, na $(-3, 0)$, $(3, \infty)$ rastúca, ostré l.min. $f(-3) = f(3) = -72$, o.l.max. $f(0) = 9$; b) Na $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$ klesajúca, lokálne extrémny nem. c) na $(-\infty, 0)$ kles., na $(0, \infty)$ rast., $f(0) = e$ o.l.min., d) na $(0, 1)$, $(1, e)$ kles., na (e, ∞) rast., $f(e) = e$ o.l.min., 2a) $y = x - \frac{\pi}{2} \vee \infty$, $y = x + \frac{\pi}{2} \vee -\infty$, 2b) $y = x + 1 \vee \pm\infty$, $x = 2$, $x = -1$, 2c) $y = 0 \vee \infty$, 2d) $y = 0 \vee -\infty$, $x = 1$, 3a) $-\frac{5}{4}$, b) 0, c) 1, d) 0, e) 1 (nie je možné použiť L'Hospitalovo pravidlo!), 3f) $\frac{1}{4}$, 3g) -1 , 3h) $\frac{3}{2}$, 3i) $\frac{1}{2}$, 3j) 2. 4a) 0, 4b) 0, 4c) 0, 4d) $e^{-\frac{1}{2}}$. 5a) $D(f) = R$, nepárna, na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ rastúca, na $(-1, 1)$ klesajúca, o.l.min $f(1) = -2$, o.l.max. $f(-1) = 2$; na $(-\infty, 0)$ r. konkávna, na $(0, \infty)$ r. konvexná, i. b. $x = 0$, asymptoty nem; 5b) $D(f) = (0, \infty)$, na $(0, e)$ rastúca, na (e, ∞) klesajúca, o.l.max. $f(e) = \frac{1}{e}$; na $(0, \sqrt{e^3})$ r. konkávna, na $(\sqrt{e^3}, \infty)$ r. konvexná, i. b. $x = \sqrt{e^3}$, asymptoty $x = 0$, $y = 0$; 5c) $D(f) = R \setminus \{-1\}$, na $(-\infty, -2)$ a $(0, \infty)$ rastúca, na $(-2, -1)$ a $(-1, 0)$ klesajúca, o.l.min $f(0) = 0$, o.l.max. $f(-2) = -4$; na $(-\infty, -1)$ r. konkávna, na $(-1, \infty)$ r. konvexná, i. b. nemá, asymptoty $x = -1$, $y = x - 1$; 5d) $D(f) = R$, nepárna, na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ klesajúca, na $(-1, 1)$ rastúca, o.l.min $f(-1) = -\frac{1}{2}$, o.l.max. $f(1) = \frac{1}{2}$; na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$ r. konkávna, na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$ r. konvexná, i. b. $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$, asymptota $y = 0$; 5e) $D(f) = R \setminus \{-1, 1\}$, párna, na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ klesajúca, na $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ rastúca, o.l.min $f(0) = 1$, na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ r. konkávna, na $(-1, 1)$ r. konvexná, i. b. nem, asymptoty $y = 0$, $x = \pm 1$; 5f) $D(f) = R \setminus \{-1\}$, na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ klesajúca, na $(0, \infty)$ rastúca, o.l.min $f(0) = 1$, na $(-\infty, -1)$ r. konkávna, na $(-1, \infty)$ r. konvexná, i. b. nem, asymptoty $x = -1$, $y = 0 \vee -\infty$; 5g) $D(f) = R$, na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ rastúca, na $(-1, 1)$ klesajúca, o.l.min $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$, o.l.max $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$, na $(-\infty, 0)$ r. konkávna, na $(0, \infty)$ r. konvexná, i. b. $x = 0$, asymptoty $y = x - \pi \vee \infty$, $y = x + \pi \vee -\infty$; 5h) $D(f) = R$, na $(-\infty, -1)$ rastúca, na $(-1, \infty)$ klesajúca, o.l.max $f(-1) = e$, na $(-\infty, 0)$ r. konkávna, na $(0, \infty)$ r. konvexná, i. b. $x = 0$, asymptoty $y = 0 \vee \infty$.

POSTUPNOSTI

1. Vypočítajte limity postupností

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3^n}{2^{n+1}}, & \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^{2n} \\ \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^n, & \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n \right). \end{aligned}$$

2. Zistite, či je postupnosť konvergentná alebo divergentná, ak

$$\left\{ \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n\sqrt{n^2+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

3. Zistite, či je postupnosť $\{\cos n\frac{\pi}{2}\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená. Nájdite aspoň dve konvergentné podpostupnosti.

Výsledky

1a) $-\infty$, b) 0, c) e^2 , d) $\frac{3}{2}$, 2. konvergentná postupnosť, 3. $\{1\}_{k=1}^{\infty}$, $n = 4k$, $\{0\}_{k=0}^{\infty}$, $n = 2k+1$.

NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY

1. Nájdite postupnosť čiastočných súčtov radu, vyšetrite konvergenciu radu.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

2. Vyšetrite konvergenciu radu a nájdite súčet radu (ak existuje).

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} & \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}} \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^{2n}} & \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^{-n}}{3^n} \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \end{aligned}$$

3. Pomocou porovnávacieho kritéria vyšetrite konvergenciu radov.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} & \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} & \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} & \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2n+2} \end{aligned}$$

4. Pomocou D'Alembertovho limitného kritéria vyšetrite konvergenciu radov.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n+1}} & \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!3^n} \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)3^n}{(n-1)!} & \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n} \end{aligned}$$

5. Pomocou Cauchyho limitného kritéria vyšetrite konvergenciu radov.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3^n} \right)^n & \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5} \right)^{2n} \\ \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)} & \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \\ \text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2} \right)^{n^3} & \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1} \right)^{2n} \end{aligned}$$

6. Vyšetrite konvergenciu radu so striedavými znamienkami. Rozhodnite, či je rad absolútne alebo relatívne konvergentný.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n} & \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \\ \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} & \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1} \end{aligned}$$

Výsledky

1.a) $\{1 - \frac{1}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, konvergentný, b) $\{\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\}_{n=2}^{\infty}$, konvergentný. 2.a) konvergentný, $s = \frac{1}{5}$, b) divergentný, c) konvergentný,

$s = -\frac{2}{3}$, d) konvergentný, $s = \frac{39}{10}$, e) konvergentný, $s = \frac{1}{3}$. 3.a)–d) konvergentný, e), f) divergentný. 4. a) divergentný, b), c) konvergentný, d) divergentný. 5.a)–c) konvergentný, d) divergentný, e) konvergentný, f) divergentný. 6.a) absolútne konvergentný, b) divergentný, c) relatívne konvergentný, d) absolútne konvergentný.

MOCNINOVÉ RADY

1. Nájdite obor konvergence a súčet radu.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n & \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} \\ \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} (x+2)^n & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} x^n \end{array}$$

2. Nájdite obor konvergence mocninových radov.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} (x+1)^n & \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^{2n}} (x-2)^n \\ \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} (x-5)^n & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} (x+1)^n \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2^n} (x+3)^n & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n \end{array}$$

3. Nájdite obor konvergence mocninových radov.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{9^n n^2} \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{2n+1}$$

4. Nájdite Taylorov rad funkcie f v bode a .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = e^{2x+1}, a = -1 & \text{b) } f(x) = \cos^2 x, a = 0 \\ \text{c) } f(x) = \sin 2x, a = \pi & \text{d) } f(x) = \frac{1}{x+1}, a = 1 \end{array}$$

Výsledky

1.a) $O_k = (2, 4)$, $s(x) = \frac{1}{4-x}$, b) $O_k = (-3, 1)$, $s(x) = \frac{1}{1-x}$, c) $O_k = (-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$, $s(x) = \frac{-9}{2x+1}$, d) $O_k = (-2, 2)$, $s(x) = \frac{x}{x+2}$, 2.a) $O_k = \langle -3, 1 \rangle$, b) $O_k = (0, 4)$, c) $O_k = R$, d) $O_k = \{-1\}$, e) $O_k = (-5, -1)$, f) $O_k = \langle -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \rangle$, 3.a) $O_k = \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$, b) $O_k = (-4, -2)$.

$$4.a) e^{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e \cdot n!} (x+1)^n, \forall x \in R,$$

$$4.b) \cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \forall x \in R,$$

$$4.c) \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1}, \forall x \in R,$$

$$4.d) \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n, \forall x \in (-1, 3).$$