

1. [7 bodov] Riešte sústavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_4 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & | & 15 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & | & 15 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -14 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & | & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & | & 15 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_4 &= -3 \\ x_2 &= x_3 - 14 \\ z_1 &= 9 \end{aligned} \quad P = \{(9, a - 14, a, -3) : a \in R\}$$

2. [6] Vypočítajte determinant $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Tento determinant sa dá počítat mnohými spôsobmi, z tých menej šikovných spomením rozvoj podľa prvého stĺpca, trochu lepšie rozvoj podľa r_1, r_2, r_4, s_2, s_4 (najmenej nenulových determinantov 3×3). Vhodnejšie je determinant najprv upraviť pomocou ERO, ESO napríklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2} 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}_{s_3-s_1} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = \underline{12}$$

3. [7] Určte definičný obor funkcie $f(x) = \arccos \frac{1}{x+1}$ a vypočítajte hodnotu $f(1)$.

$\arccos(x)$ je definované pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Máme teda určiť, pre ktoré x platí

$-1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$. Najjednoduchšie je to prepísať na $\left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1$ a to ešte prepísať na

$$\frac{1}{|x+1|} \leq 1 \quad \text{menovateľ je kladný, nerovnosť môžeme násobiť } |x+1|$$

$$1 \leq |x+1|$$

$|x+1| = |x - (-1)|$ je vzdialenosť čísla x od -1 : $\overbrace{\quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad}^{|x+1|}$
Teda $D(f) = (-\infty, -2) \cup \langle 0, \infty$

$$\text{Iný správny postup je: } -1 \leq \frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{x+1} \leq 1$$

$$0 \leq 1 + \frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{x+1} - 1 \leq 0$$

$$\text{Dostaneme 2 podmienky: } 0 \leq \frac{x+2}{x+1} \quad \frac{-x}{x+1} \leq 0$$

Z nulových bodov čitateľov a menovateľov: $R = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup \langle 0, \infty$

$x \in (-\infty, -2)$ $x+2 < 0$ $x+1 < 0$ $-x > 0$ platia obe podmienky.

$x \in (-2, -1)$ $x+2 > 0$ $x+1 < 0$ $-x > 0$ neplatí 1. ani 2. podmienka.

$x \in (-1, 0)$ $x+2 > 0$ $x+1 > 0$ $-x > 0$ neplatí 2. podmienka.

$x \in (0, \infty)$ $x+2 > 0$ $x+1 > 0$ $-x < 0$ platia obe podmienky.

Najčastejší **nesprávny postup** určenia $D(f)$
(násobením nerovnosti záporným číslom sa zmení $< \longleftrightarrow >$):

$$\begin{array}{ll} -1 \leq \frac{1}{x+1} & \frac{1}{x+1} \leq 1 \\ -x-1 \leq 1 & 1 \leq x+1 \\ x \leq -2 & 0 \leq x \end{array}$$

Výsledok je síce správny, ale nekorektným postupom, za to bolo 0 bodov.

Výpočet $f(1) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ mal správne skoro každý študent.