Skúška MAT1 5.6.2020

1. [10] Vypočítajte súčet radu

1A. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} - \frac{4}{3} = -\frac{7}{6}$$

1B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

1C. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} - \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{18} - \frac{8}{9} = -\frac{5}{6}$$

Poznámka. Študentom, ktorí namiesto výpočtu súčtu iba ukázali, že rad je konvergentný som dával najviac 1 bod.

2A. Daná je funkcia $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

a) [1+2+2] Určte $D(f)$, vypočítajte deriváciu $f'(x)$ a určte $D(f')$,

$$4 - x^2 > 0 \iff x^2 < 4 \iff |x| < 2, \quad D(f) = (-2, 2),$$
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}, \quad D(f') = \{x \in D(f) \colon \exists f'(x)\} = D(f)$$

Poznámka. Priveľa študentov napísalo $D(f') = R \setminus \{-2, 2\}$. Derivácia funkcie ale nemôže byť definovaná v bodoch, kde nie je definovaná ani samotná funkcia. Keď si to uvedomíte je rozhodnutie kde je $f'(x) \geq 0$ a kde $f'(x) \leq 0$ je veľni jednoduché. menovateľ $4 - x^2 > 0$, rozhoduje teda znamienko čitateľa.

b) [3] Určte intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ monotónna a napíšte jej extrémy.

$$x \in D(f) \vee f'(x) > 0 \implies -2x > 0,\ x \in (-2, 0\rangle \qquad f'(x) < 0 \implies -2x < 0,\ x \in \langle 0, 2)$$

$\nearrow \quad \searrow$ $\qquad f$ je rastúca na $(-2, 0\rangle$, klesajúca na $\langle 0, 2)$,

______|_____|_____|_____ $\quad f(0) = \ln 4$ je jej maximum.

$-2 \quad 0 \quad 2$

Poznámka. Na určenie, kde je maximum netreba druhú deriváciu, keď už poznáte intervaly monotónnosti.

c) [2] Určte jej asymptoty.
ASS funkcia nemá, $\lim\limits_{x \to \pm 2} f(x) = \ln 0 = -\infty \implies$ ABS: $x = -2$, $x = 2$

Poznámka. Nestačí napísať ABS sú $x = -2$, $x = 2$, treba aj počítať limity.

Za hľadanie asymptoty so smernicou v $\pm\infty$ by si v tomto prípade študent zaslúžil strhnúť aspoň 3 body, uvedomte si aký je $D(f)$.

2B. Daná je funkcia $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

a) [1+2+2] Určte $D(f)$, vypočítajte deriváciu $f'(x)$ a určte $D(f')$,

$$1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff |x| < 1, \quad D(f) = (-1, 1),$$
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}, \quad D(f') = \{x \in D(f) \colon \exists f'(x)\} = D(f)$$

b) [3] Určte intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ monotónna a napíšte jej extrémy.

$$x \in D(f) \vee f'(x) > 0 \implies -2x > 0,\ x \in (-1, 0\rangle \qquad f'(x) < 0 \implies -2x < 0,\ x \in \langle 0, 1)$$

$\nearrow \quad \searrow$ $\qquad f$ je rastúca na $(-1, 0\rangle$, klesajúca na $\langle 0, 1)$,

______|_____|_____|_____ $\quad f(0) = \ln 4$ je jej maximum.

$-1 \quad 0 \quad 1$

c) [2] Určte jej asymptoty.
ASS funkcia nemá, $\lim\limits_{x \to \pm 1} f(x) = \ln 0 = -\infty \implies$ ABS: $x = -1$, $x = 1$

2C. Daná je funkcia $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

a) [1+2+2] Určte $D(f)$, vypočítajte deriváciu $f'(x)$ a určte $D(f')$,

$$9 - x^2 > 0 \iff x^2 < 9 \iff |x| < 3, \quad D(f) = (-3, 3),$$
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}, \quad D(f') = \{x \in D(f) \colon \exists f'(x)\} = D(f)$$

b) [3] Určte intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ monotónna a napíšte jej extrémy.

$$x \in D(f) \vee f'(x) > 0 \implies -2x > 0,\ x \in (-3, 0\rangle \qquad f'(x) < 0 \implies -2x < 0,\ x \in \langle 0, 3)$$

$\nearrow \quad \searrow$ $\qquad f$ je rastúca na $(-3, 0\rangle$, klesajúca na $\langle 0, 3)$,

______|_____|_____|_____ $\quad f(0) = \ln 4$ je jej maximum.

$-3 \quad 0 \quad 3$

c) [2] Určte jej asymptoty.
ASS funkcia nemá, $\lim\limits_{x \to \pm 1} f(x) = \ln 0 = -\infty \implies$ ABS: $x = -3$, $x = 3$

3A. Vypočítajte limity

a) [3] $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+x+1}{x^3+x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5(1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\dfrac{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \infty$

b) [3] $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg} x}\ (\dfrac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2\sin 2x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{0}{(-1)^2} = 0$

c) [3] $\lim\limits_{x\to\infty} x\ \operatorname{arccotg} x\ (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

d) [1] $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{1}{\ln(4-x^2)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

3B.

a) [3] $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+x+1}{x^3+x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\dfrac{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = -\infty$

b) [3] $\lim\limits_{x\to-\pi} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg} x}\ (\dfrac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to-\pi} \dfrac{2\sin 2x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{0}{1} = 0$

c) [3] $\lim\limits_{x\to\infty} x\ \operatorname{arccotg} x\ (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

d) [1] $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{\ln(1-x^2)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

3C.

a) [3] $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+x+1}{x^4+x+1} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5(1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{x^4(1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4})} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\dfrac{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = -\infty$

b) [3] $\lim\limits_{x\to3\pi} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg} x}\ (\dfrac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to3\pi} \dfrac{2\sin 2x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{0}{(-1)^2} = 0$

c) [3] $\lim\limits_{x\to\infty} x\ \operatorname{arccotg} x\ (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

d) [1] $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{1}{\ln(x^2)} = \dfrac{1}{\ln e^2} = \dfrac{1}{2}$

Poznámka. Pomerne veľa z vás počítalo b) pomocou vzorca $(\sin x)^2 = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, ale napísali $\sin x^2 = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, keby som za to strhol body, mnohí by ste mali horšiu známku. Správne a obvyklé by bolo aj $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. To čo ste napísali je $\sin x^2 = \sin(x^2) \neq \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

Poznámka. Riešte sústavy rovníc znamená určiť množinu <u>všetkých</u> jej riešení. Nestačí zistiť, že existuje alebo existuje nekonečne veľa riešení. To píšem pre tých z Vás, ktorým sa zdá, že dostali málo bodov.

4A. Riešte sústavy rovníc

$$a)[7]\quad \begin{aligned} 2x+y+z&=1\\ 3x+2y-z&=2\\ 4x+y+7z&=1 \end{aligned} \qquad b)[3]\quad \begin{aligned} 2x_1-x_2&=1\\ x_1+2x_2&=2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&1\\ 3&2&-1&2\\ 4&1&7&1 \end{array}\right) \sim_{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&1\\ 1&1&-2&1\\ 0&-1&5&-1 \end{array}\right) \sim_{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-2&1\\ 2&1&1&1\\ 0&-1&5&-1 \end{array}\right) \sim_{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-2&1\\ 0&-1&5&-1\\ 0&-1&5&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&3&0\\ 0&-1&5&-1\\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \implies \begin{aligned} x&=-3a\\ y&=1+5a\,, P_a=\{(-3a,1+5a,a)\colon a\in R\}\\ z&=a \end{aligned}$$

$$d=\begin{vmatrix} 2&-1\\ 1&2 \end{vmatrix}=5,\ d_1=\begin{vmatrix} 1&-1\\ 2&2 \end{vmatrix}=4,\ d_2=\begin{vmatrix} 2&1\\ 1&2 \end{vmatrix}=3 \implies P_b=\left\{\left(\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5}\right)\right\}$$

4B

$$a)[4]\quad \begin{aligned} 2x+y+z&=1\\ 3x+2y-z&=2\\ 4x+y+7z&=-1 \end{aligned} \qquad b)[6]\quad \begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=1\\ x_1+2x_2&=5\\ x_2-3x_3&=-1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&1\\ 3&2&-1&2\\ 4&1&7&-1 \end{array}\right) \sim_{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&1\\ 1&1&-2&1\\ 0&-1&5&-3 \end{array}\right) \sim_{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-2&1\\ 2&1&1&1\\ 0&-1&5&-3 \end{array}\right) \sim_{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-2&1\\ 0&-1&5&-1\\ 0&-1&5&-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&3&0\\ 0&-1&5&-1\\ 0&0&0&-2 \end{array}\right) \implies P_a=\emptyset$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-1&1&1\\ 1&2&0&5\\ 0&1&-3&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&5\\ 0&1&-3&-1\\ 2&-1&1&1 \end{array}\right) \sim_{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&5\\ 0&1&-3&-1\\ 0&-5&1&-9 \end{array}\right) \sim_{r_3+5r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&0&5\\ 0&1&-3&-1\\ 0&0&-14&-14 \end{array}\right) \implies \begin{aligned} x_3&=1\\ x_2&=-1+3=2\\ x_1&=5-4=1 \end{aligned} \quad P_b=\{(1,2,1)\}$$

4C

$$a)[7]\quad \begin{aligned} 2x+y+z&=-1\\ 3x+2y-z&=-2\\ 4x+y+7z&=-1 \end{aligned} \qquad b)[3]\quad \begin{aligned} 2x_1-x_2&=2\\ x_1+2x_2&=1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&-1\\ 3&2&-1&-2\\ 4&1&7&-1 \end{array}\right) \sim_{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&-1\\ 1&1&-2&-1\\ 0&-1&5&1 \end{array}\right) \sim_{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-2&-1\\ 2&1&1&-1\\ 0&-1&5&1 \end{array}\right) \sim_{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-2&-1\\ 0&-1&5&1\\ 0&-1&5&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&3&0\\ 0&1&-5&-1\\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \implies \begin{aligned} x&=-3a\\ y&=-1+5a\,, P_a=\{(-3a,-1+5a,a)\colon a\in R\}\\ z&=a \end{aligned}$$

$$d=\begin{vmatrix} 2&-1\\ 1&2 \end{vmatrix}=5,\ d_1=\begin{vmatrix} 2&-1\\ 1&2 \end{vmatrix}=5,\ d_2=\begin{vmatrix} 2&2\\ 1&1 \end{vmatrix}=0 \implies P_b=\left\{(1,0)\right\}$$

5A. [10] Funkciu $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^3-x^2+4x-4}$ napíšte ako súčet elementárnych zlomkov nad R

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+4)$

$$\frac{2x^2+3}{x^3-x^2+4x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \implies 2x^2+3 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + 4A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$2x^2+3 = (A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C \implies \begin{matrix} A+B=2, & A=2-B, & A=5-4A \implies A=1 \\ C-B=0, & C=B, & B=1 \\ 4A-C=3, & C=B=4A-3, & C=1 \end{matrix}$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+4}}$$

5B. [10] Funkciu $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{x^3-x^2+4x-4}$ napíšte ako súčet elementárnych zlomkov nad R

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+4)$

$$\frac{2x^2+3x}{x^3-x^2+4x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \implies 2x^2+3x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + 4A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$2x^2+3x = (A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C \implies \begin{matrix} A+B=2, & B=2-A, & B=2-A \implies B=1 \\ C-B=3, & C=B+3, & 4A=5-A \implies A=1 \\ 4A-C=0, & C=4A, & C=4A \implies C=4 \end{matrix}$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x+4}{x^2+4}}$$

5C. [10] Funkciu $f(x) = \dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-x^2+4x-4}$ napíšte ako súčet elementárnych zlomkov nad R

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+4)$

$$\frac{3x^2+3x+3}{x^3-x^2+4x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \implies 3x^2+3x+3 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + 4A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$3x^2+3x+3 = (A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C \implies \begin{matrix} A+B=3, \\ C-B=3, \\ 4A-C=3, \end{matrix}$$

napr. pomocou determinantov:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5,\ d_1 = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9,\ d_2 = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$d_3 = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21 \qquad \underline{f(x) = \frac{\frac{9}{5}}{x-1} + \frac{\frac{6}{5}x + \frac{21}{5}}{x^2+4}}$$

Alebo (rýchlejšie) $x = 1$: $9 = 5A \implies A = \dfrac{9}{5}$, $\quad B = 3 - A = \dfrac{15-9}{5} = \dfrac{6}{5}$, $\quad C = 3 + B = \dfrac{15+6}{5} = \dfrac{21}{5}$

6A. [5+5] a) Napíšte reálnu a imaginárnu časť čísla $c = \dfrac{(1-i)(1-2i)}{3+4i}$

$$c = \frac{(1-i)(1-2i)}{3+4i} = \frac{-1-3i}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{-15-5i}{25} \implies \operatorname{Re} c = -\frac{3}{5},\ \operatorname{Im} c = -\frac{1}{5}$$

b) Vyriešte binomickú rovnicu $z^3 = -i$.

$$\begin{aligned}
z^3 &= e^{i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}\\
z_k &= \left(e^{i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}\right)^{1/3}\\
z_k &= e^{i(\frac{1}{2}\pi+k\frac{2}{3}\pi)},\ k=0,1,2,\\
z_0 &= i,\\
z_1 &= e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i,\\
z_2 &= e^{i\frac{11}{6}\pi} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}i
\end{aligned}$$

obr. 1 bod

6B. [5+5] a) Napíšte reálnu a imaginárnu časť čísla $c = \dfrac{(1-i)(1-2i)}{3-4i}$

$$c = \frac{(1-i)(1-2i)}{3-4i} = \frac{-1-3i}{3-4i}\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{9-13i}{25} \implies \operatorname{Re} c = \frac{9}{25},\ \operatorname{Im} c = -\frac{13}{25}$$

b) Vyriešte binomickú rovnicu $z^3 = 8i$.

$$\begin{aligned}
z^3 &= 8e^{i(\frac{1}{2}\pi+2k\pi)}\\
z_k &= 2\left(e^{i(\frac{1}{2}\pi+2k\pi)}\right)^{1/3}\\
z_k &= 2e^{i(\frac{1}{6}\pi+k\frac{2}{3}\pi)},\ k=0,1,2,\\
z_0 &= 2e^{i(\frac{1}{6}\pi+k\frac{1}{6}\pi)} = \sqrt{3}+i,\\
z_1 &= 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3}+i,\\
z_2 &= 2e^{i\frac{9}{6}\pi} = -2i
\end{aligned}$$

6C. [10] a) Napíšte reálnu a imaginárnu časť čísla $c = \dfrac{(1-i)(1-2i)}{4+3i}$

$$c = \frac{(1-i)(1-2i)}{4+3i} = \frac{-1-3i}{4+3i}\frac{4-3i}{4-3i} = \frac{-13-9i}{25} \implies \operatorname{Re} c = -\frac{13}{25},\ \operatorname{Im} c = -\frac{9}{25}$$

b) Vyriešte binomickú rovnicu $z^3 = -8i$.

$$\begin{aligned}
z^3 &= 8e^{i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}\\
z_k &= 2\left(e^{i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}\right)^{1/3}\\
z_k &= 2e^{i(\frac{1}{2}\pi+k\frac{2}{3}\pi)},\ k=0,1,2,\\
z_0 &= 2i,\\
z_1 &= 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3}-i,\\
z_2 &= e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3}-i
\end{aligned}$$