Teória

1. O každom tvrdení a – d rozhodnite, či je pravdivé. Svoju odpoveď odôvodnite.

   a) [3 body] Ak je $z \in C$, tak imaginárna časť $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$. **Pravda**

   $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z = y$, $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i}(2iy) = y$

   b) [3] Množina $\{(1, -1)\,;\,(1, 1)\,;\,(1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ je lineárne nezávislá. **Nepravdivé**
   odôvodnenie: v R^2 LNZ množina má najviac 2 prvky
   alebo $\frac{1}{2}(1, -1) + \frac{1}{2}(1, 1) - (1, 0) = (0, 0)$

   c) [4] Ak $|q| = \frac{2}{e}$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1 - q}$. **nepravda**

   $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}$$

   d) [4] Funkcia $f\colon R \to R$ má spojitú deriváciu $f'\colon R \to R$ a vieme, že $f(1) = -2$, $f'(1) = 1$,
   Potom pre funkciu $F(x) = \operatorname{arctg}\big(f(x)\big)$ platí $F'(1) < 1$.

   $$F'(x) = \operatorname{arctg}\big(f(x)\big) = \frac{1}{1 + f^2(x)} f'(x),\ F'(1) = \frac{f'(1)}{1 + f^2(1)} = \frac{1}{1 + 4} < 1 \implies \textbf{pravda}$$

---

2. [3] Doplňte nasledujúce tvrdenie tak, aby bolo pravdivé:

   Ak $a_n \in R$ a $\lim\limits_{n \to \infty}$ .... > 1, tak nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ....

   Ak $\lim\limits_{n \to \infty} a_n > 1$ alebo $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, tak je rad divergentný

Príklady

3. [5] Riešte rovnicu $z^4 = -4$, množinu všetkých riešení vyjadrite v exponenciálnom a algebraickom tvare a znázornite.

$$z^4 = 4e^{i(\pi+2k\pi)} \implies z_k = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}(\pi+2k\pi)} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})},\ k = 0,1,2,3$$

$$z_0 = 1+i,\ z_1 = -1+i,\ z_2 = -1-i,\ z_3 = 1-i$$

4 [5] Riešte sústavu
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim_{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim_{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right) \implies P = \{(-1-2b, -2+2a-3b, a, b) \colon a, b \in R\}$$

5. [6] Vypočítajte limity a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$, b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$, c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} \text{,,}\frac{0}{0}\text{''} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0} -2(x+1)^{\frac{1}{2}} = -2$$

b) $$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} \text{,,}\frac{\infty}{-\infty}\text{''} = \lim_{x\to \infty} -2(x+1)^{\frac{1}{2}} = -\infty$$

c) $$\lim_{x\to 3} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{3}{1-\sqrt{4}} = -3$$

6. $f(x) = \dfrac{\ln(1-2x)}{2x}$.

a) [2] $D(f)$ napíšte v tvare zjednotenia intervalov, $1-2x>0 \iff 1>2x$, $x \neq 0$, t.j. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

b) [5] vypočítajte limity funkcie f v krajných bodoch týchto intervalov,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-2x)}{2x} „\frac{\infty}{-\infty}" = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2}{1-2x}}{2} = 0.$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{2x} „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2}{1-2x}}{2} = -1$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{2x} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

c) [2] napíšte rovnice všetkých asymptot funkcie f. Podľa výsledkov z b) ABS: $x = \frac{1}{2}$, ASS v $-\infty$: $y = 0$

d) [3] vypočítajte deriváciu $f'(x)$ a určte $D(f')$.

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{1-2x}2x - 2\ln(1-2x)}{4x^2} = \frac{-2x-(1-2x)\ln(1-2x)}{2x^2(1-2x)},\ D(f') = D(f)$$

7. [4] Vieme, že druhá derivácia funkcie f je $f''(x) = 5(x+1)^2(x-2)(2x-5)e^{-2x}$. Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia f konvexná a na ktorých je konkávna.

na $(-\infty, 2\rangle$ a na $\langle \frac{5}{2}, \infty$ konvexná; na $\langle 2, \frac{5}{2}\rangle$ konkávna.

8. [6] Vypočítajte súčet nekonečného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{5^n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n} - \frac{2^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n = 3\cdot\frac{3}{5}\frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 2\cdot\frac{2}{5}\frac{1}{1-\frac{2}{5}} =$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{4}{3} = \frac{19}{6}$$

9. [5] Nájdite Taylorov polynóm stupňa 2 funkcie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ so stredom $a = 0$.

$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $f(0) = 1$
$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$
$f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$, $f''(0) = \frac{3}{4}$
$T_2(f, 0, x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$