Zápočtová písomka 7.5.2020 – I

1. [6] Vypočítajte limity

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin \dfrac{1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 3x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{\ln x}$

2. Vypočítajte deriváciu funkcií f, g, určte definičný obor $D(f)$, $D(f')$ a $D(g)$, $D(g')$.

   a) [3] $f(x) = \ln(2x) + \sin x - x^3 + 2$ b) [5] $g(x) = \ln \dfrac{x^2}{x+1}$

3. [6] Určte intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ monotónna a napíšte jej lokálne extrémy.

1a) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin \dfrac{1}{x+1} = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$

1b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \sin(3x) = 0 \times \text{ohraničená} = 0$

1c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{\ln x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

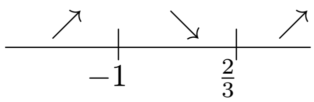
2a) $D(f) = (0, \infty) = D(f')$, $f'(x) = 2\frac{1}{2x} + \cos x - 3x^2 = \frac{1}{x} + \cos x - 3x^2$

2b) $x^2 \geq 0$, $x + 1 > 0 \iff x > -1$, $D(g) = (-1, 0) \cup (0, \infty)$

$$g' = \frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x^2}\,\frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x^2}\,\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{x(x+1)},$$

$D(g') = D(g)$.

3. $f'(x) = 6x^2 + 2x - 4 = 2(3x^2 + x - 2) = 0$, $D = 1 + 24 = 25$, $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{6}$,
   $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$



rastúca na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 2/3, \infty)$; klesajúca na $\langle -1, 2/3\rangle$. $f(-1) = 4$ je o.l. maximum, $f(2/3) = -\frac{17}{27}$ je o. l. minimum.

Zápočtová písomka 7.5.2020 – II

1. [6] Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to 1} \arccos \dfrac{1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$

2. Vypočítajte deriváciu funkcií f, g, určte definičný obor $D(f)$, $D(f')$ a $D(g)$, $D(g')$.

a) [3] $f(x) = \ln(x) + \sin(2x) - x^3 + 2x$ b) [5] $g(x) = \ln \dfrac{x^2}{2x+2}$

3. [6] Určte intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x - 1$ monotónna a napíšte jej lokálne extrémy.

1a) $\lim\limits_{x\to 1} \arccos \dfrac{1}{x+1} = \arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

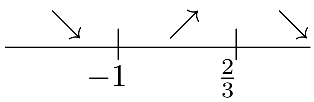
1b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 3 \underbrace{\dfrac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} = 3$

1c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-8} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{3x^2} = \dfrac{5}{12}$

2a. $D(f) = (0,\infty) = D(f')$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2\cos 2x - 3x^2 + 2$

2b. $D(g) = (-1,0) \cup (0,\infty) = D(g')$, $g'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2x+2}\right)' = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{2x(2x+2)-2x^2}{2x+2} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

3. $f'(x) = -6x^2 - 2x + 4 = -2(3x^2 + x - 2)$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$



klesajúca na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 2/3, \infty)$; rastúca na $\langle -1, 2/3\rangle$.
$f(-1) = -4$ je o.l. minimum, $f(2/3) = \frac{17}{27}$ je o. l. maximum.

Zápočtová písomka 7.5.2020 – III

1. [6] Vypočítajte limity

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-1}{\ln x}$

2. Vypočítajte deriváciu funkcií f, g, určte definičný obor $D(f)$, $D(f')$ a $D(g)$, $D(g')$.

   a) [3] $f(x) = \ln(x) + \sin(2x) - x^3 + 2x$ b) [5] $g(x) = \ln \dfrac{x^2}{2x+1}$

3. [6] Určte intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x$ monotónna a napíšte jej lokálne extrémy.

1a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{3}{\cos^2(3x)}}{2} = \dfrac{3}{2}$

1b) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x} = 0 \times \text{ohraničená} = 0$

1c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-1}{\ln x} = \dfrac{-1}{-\infty} = 0$

2a. $D(f) = (0,\infty) = D(f')$, $f' = \frac{1}{x} + 2\cos(2x) - 3x^2 + 2$

2b. $D(g) = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0,\infty)$, $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}\right)' = \dfrac{2(2x+1)-2x}{x(2x+1)} = \dfrac{2x+2}{x(2x+1)}$

3. $f'(x) = -6x^2 - 2x + 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$

$$\searrow \quad \underset{-1}{|} \quad \nearrow \quad \underset{\frac{2}{3}}{|} \quad \searrow$$

klesajúca na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 2/3, \infty)$; rastúca na $\langle -1, 2/3\rangle$.
$f(-1) = -3$ je o.l. minimum, $f(2/3) = \frac{44}{27}$ je o. l. maximum.