Skúška z MAT1-E, 22. mája 2017, 11:00 hod.

Meno a Priezvisko:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$	semester	$\sum\sum$	známka

Teória (odpovede aj odôvodnenie píšte priamo sem)

1. O každom tvrdení a – d rozhodnite, či je pravdivé. Svoju odpoveď odôvodnite.

a) [3] Množina všetkých riešení sústavy (lineárnych rovníc) zodpovedajúcej matici $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ je $M = \{1-2a-b\,,\ a\,,\ 0\,,\ -b\,,\ b)\colon a,b \in \mathbb{R}\}$

Nie, M je množina riešení, ale nie všetkých, $M \subset P = \{1-2a-b\,,\ a\,,\ c\,,\ -b\,,\ b)\colon a,b,c \in \mathbb{R}\}$

---

b) [3] $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \implies AB = BA$.

Nie, násobenie matíc nie je komutatívne, napr. pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA$

---

c) [3] Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má deriváciu $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $F(x) = \operatorname{arctg}\big(f(x)\big)$. Ak $f(1) = f'(1) = -1$, tak $F'(1) < 0$.

Áno, $F'(x) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} \implies F'(1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} < 0$.

---

d) [3] Ak $a_n \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergentný

Nie, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ je len nutná, nie postačujúca podmienka konvergencie. Napr. pre $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ dostaneme divergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

2. [3] Nasledujúce tvrdenie doplňte tak, aby bolo pravdivé. Nech $a, b, a_n \in \mathbb{R}$. Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (b-a)^n$ konverguje, tak mocninový rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje pre $\forall x \in \mathbb{R}$ také, že ....<.................

Riešenie:

$\forall x \in \mathbb{R}$ také, že $\quad |x-a| < |b-a|$

Príklady (riešenie píšte na osobitnom papieri)

3. [5] Riešte sústavu

(Výsledok napíšte v algebraickom tvare)

$$\begin{aligned} (1+i)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ ix_1 + (1-i)x_2 &= i \end{aligned}$$

Napr. Cramerovým pravidlom:

$d = \begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ i & 1-i \end{vmatrix} = 2-2i$, $d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ i & 1-i \end{vmatrix} = -2i$ $d_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 0 \\ i & i \end{vmatrix} = -1+i$,

$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{-2i}{2(1-i)} = \frac{-i(1+i)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $d_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{-(1-i)}{2(1-i)} = -\frac{1}{2}$.

---

4. [5] Vypočítajte maticu inverznú k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a urobte skúšku správnosti.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim_{\substack{R_2-2R_3 \\ R_1-2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim_{R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ skúška } AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

5. [5] Určte $p \in \mathbb{R}$ tak, aby bola funkcia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}, & \text{ak } x \neq 1, \\ p, & \text{ak } x = 1 \end{cases}$ spojitá v bode $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - 1)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3} = p$$

---

6. [12] Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (t.j. určte $D(f)$, asymptoty, monotónnosť, lok. extrémy, konvexnosť a konkávnosť, inflexné body), načrtnite jej graf a určte $H(f)$.

$D(f) = (0, \infty)$, ABS: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \left(= \dfrac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$. $x = 0$ je ABS

ASS: $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0,$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. $y = 0$ je ASS v $+\infty$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \implies \ln x = 1 \implies x = e\,.$$

Na $(0, e\rangle$ je f rastúca, na $\langle e, \infty)$ klesajúca, $f(e) = \frac{1}{e}$ je ostré lok. maximum.

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 + 2\ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0 \implies$$

$x = e^{3/2} = e\sqrt{e}$, konkávna na $(0, e\sqrt{e}\rangle$, konvexná na $\langle e\sqrt{e}, \infty)$, $f(e\sqrt{e}) = \frac{3}{2}\frac{1}{e\sqrt{e}}$, inflexný bod $[e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}]$. $H(f) = (-\infty, \frac{1}{e})$.

---

7. [7] Vypočítajte súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{2n}}{5^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{2n}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{4}{5}\frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}\,.$$

---

8. [5] Určte polomer konvergencie mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$

Cauchyho kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{3^n} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} |x| = \frac{|x|}{3} < 1 \iff |x| < 3 \implies \rho = 3.$

---

9. [6] Nájdite Taylorov polynóm $T_2(f, a, x)$ funkcie $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$ so stredom $a = \frac{1}{2}$.

$f(a) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$,

$f'(x) = \dfrac{1}{1+(2x)^2}(2x)' = \dfrac{2}{1+4x^2}$, $f'(a) = 1$

$f''(x) = \big(2(1+4x^2)^{-1}\big)' = -16x(1+4x^2)^{-2}$, $f''(a) = -8 \cdot 2^{-2} = -2$

$T_2(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = \frac{\pi}{4} + (x - \frac{1}{2}) - (x - \frac{1}{2})^2.$