1 FUNKCIE ($D(f)$, f^{-1}, $g \circ f$)

1. Určte definičný obor funkcií.

$f_1(x) = \ln\left(\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}\right)$

$f_2(x) = \sqrt{2\cos x - \sqrt{3}}$

$f_3(x) = \arccos\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

$f_4(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2-1)}$

$f_5(x) = \dfrac{x}{\ln(3-x)} + \ln(4x - x^2)$

$f_6(x) = \sqrt{\arcsin(x-3)}$

$f_7(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{|x|-2}}$

$f_8(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{e^x - 1}$

2. Určte definičný obor funkcie a zistite, či je f párna alebo nepárna.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $f(x) = \dfrac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$

c) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ d) $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}-2}$

e) $f(x) = \arccos(3-|x|)$

3. Určte $D(f)$ a nájdite inverznú funkciu k funkcii f.

a) $f(x) = \pi + \arcsin(2x+1)$

b) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$

4. Dané sú funkcie f a g. Určte definičné obory a obory hodnôt funkcií f a g. Nájdite také zúženie funkcie f, aby existovala zložená funkcia $g \circ f|_A$ a určte ju.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \ln(x-2)$.

c) $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = \arccos x$.

Výsledky

1. $D(f_1) = (3,4\rangle$, $D(f_2) = \bigcup_{k\in N} \langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\rangle$, $D(f_3) = (-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, $D(f_4) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, $D(f_5) = (0,2) \cup (2,3)$, $D(f_6) = \langle 3,4\rangle$, $D(f_7) = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$, $D(f_8) = (-\infty, 0) \cup (0,2)$.

2.a) $D(f) = (-2,2)$, nepárna, 2.b) $D(f) = (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)$, párna. 2.c) $D(f) = (-1,1)$, nepárna, 2.d) $D(f) = (0,4) \cup (4,\infty)$, nie je párna ani nepárna, 2.e) $D(f) = \langle -4,-2\rangle \cup \langle 2,4\rangle$ párna.

3.a) $D(f) = \langle -1, 0\rangle$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(-\sin x - 1)$,

3.b) $D(f) = \langle 0,\infty)$, $f^{-1}(x) = e^{x^2} - 1$.

4.a) $A = (-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, $(g \circ f|_A)(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2}$,

4. b) $A = (-2,-1)$, $(g \circ f|_A)(x) = \ln\left(\frac{-x-2}{x+1}\right)$,

4. c) $A = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$, $(g \circ f|_A)(x) = \arccos\left(x^2 - x - 1\right)$.

2 LIMITY FUNKCIÍ

1. Určte definičný obor funkcie, vypočítajte jednostranné limity funkcie v bode a, rozhodnite, či existuje limita funkcie v bode a.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $a = -1$

b) $f(x) = \ln(x^2)$, $a = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$, $a = 0$

d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-3}\right)$, $a = 3$

2. Vypočítajte limity v krajných bodoch definičného oboru a načrtnite graf funkcie.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x)}$

3. Vypočítajte limity funkcií.

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

c) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 3x}{x-\pi}$ d) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\operatorname{tg} 2x}$

4. Vypočítajte nevlastné limity funkcií.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{1-2x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x^2+2x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x+3}}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{3x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x-3}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x}\right)$

Výsledky

1a) $D(f) = R \setminus \{-1\}$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\nexists$,

1b) $D(f) = R \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\exists$,

1c) $D(f) = R \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\nexists$,

1d) $D(f) = R \setminus \{3\}$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\nexists$.

2a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1/2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1/2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$,

2b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

2c) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$,

3a) $-1/3$, 3b) $\frac{1}{20}$, 3c) -3, 3d) 0

4a) $-\infty$, 4b) 0, 4c) 0, 4d) 0, 4e) ∞, 4f) $\frac{2}{3}$, 4g) ∞, 4h) 0.

3 SPOJITOSŤ FUNKCIÍ

1. Vyšetrite spojitosť funkcie $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 6 & x = 1, \end{cases}$.

2. Zistite, či je funkcia $f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\cos^3 x - \cos x}{x^2} & x > 0. \end{cases}$

spojitá v bode $a = 0$.

3. Určte parameter p tak, aby funkcia $f\colon (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \to R$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{2x} & x\neq 0\\ p & x=0\end{cases}$$ bola spojitá v bode 0.

4. Určte definičný obor a nájdite maximálne spojité rozšírenie funkcie $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}$.

Výsledky

1. f je spojitá na $R\setminus\{0\}$, 2. f nie je spojitá v bode 0, 3. $p=\frac{3}{2}$,
4. $\tilde{f}\colon R\to R$, $\tilde{f}(x)=\frac{x+1}{x^2-x+1}$.

4 DERIVÁCIE FUNKCIÍ

1. Zistite $D(f)$, množinu bodov, v ktorých je f spojitá a množinu bodov, v ktorých $\exists$ derivácia f. Vypočítajte f'.

a) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$

b) $f(x)=\dfrac{2-3x}{x^3}$

c) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}$

d) $f(x)=\left(x^2-2x\right)e^x\ln x$

e) $f(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{x}$

f) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-35}$

g) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+4}$

h) $f(x)=\operatorname{arcotg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

i) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$

j) $f(x)=e^{\cos x}+\ln(\ln(2x+1))$

k) $f(x)=3(x-1)e^{1-x^3}+\ln^3\left(\dfrac{1}{x^2+3x+4}\right)$.

2. Nech $f\colon R\to R$, $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} & x<0\\ \ln(1+x) & x\geq 0\end{cases}$.

Zistite, či je funkcia f

a) spojitá v bode $x=0$,

b) diferencovateľná v bode $x=0$.

3. Nájdite deriváciu funkcie $f(x)=\ln|1-x|$ a načrtnite graf f a f'.

4. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie v bode $(a,f(a))$.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$, $a=3$.

b) $f(x)=e^{-x}\cos 2x$, $a=0$.

c) $f(x)=e^{x^2}\ln(1-x)$, $a=0$.

Výsledky

1a) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$,
1b) $D(f)=D(f')=R\setminus\{0\}$, $f'(x)=\frac{6(x-1)}{x^4}$,
1c) $D(f)=D(f')=R\setminus\{k\pi,k\in Z\}$, $f'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$,
1d) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=e^x\left[(x^2-2)\ln x+x-2\right]$,
1e) $D(f)=D(f')=R\setminus\{0\}$, $f'(x)=\frac{e^x(x^2+x-1)}{x^2}$,
1f) $D(f)=(-\infty,-7\rangle\cup\langle 5,\infty)$, $D(f')=(-\infty,-7)\cup(5,\infty)f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-35}}$,
1g) $D(f)=D(f')=R$, $f'(x)=\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+4}}$,
1h) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$,
1i) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+1}+\frac{\ln(x^2+1)}{2x\sqrt{x}}$.
1j) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$,
$f'(x)=-(\sin x)e^{\cos x}+\frac{2}{(2x+1)\ln(2x+1)}$,
1k) $D(f)=D(f')=R$,
$f'(x)=3e^{1-x^3}\left(1+x^2-x^3\right)-\left(\frac{3(2x+3)}{x^2+3x+4}\right)\ln^2\left(x^2+3x+4\right)$.
2. f je spojitá v bode 0, nie je difertencovateľná v 0.
3. $D(f)=D(f')=R\setminus\{1\}$, $f'(x)=\frac{1}{x-1}$.
4a) $t\colon y-2=-(x-3)$, $n\colon y-2=(x-3)$, 2b),c) $t\colon y=-x$, $n\colon y=x$.

5 PRIEBEH FUNKCIE

1. Vyšetrite monotónnosť a nájdite lokálne extrémy funkcie.

a) $f(x)=x^4-18x^2+9$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$

c) $f(x)=e^{(x^2+1)}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

2. Nájdite asymptoty funkcie.

a) $f(x)=x-\operatorname{arctg}x$

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$

c) $f(x)=(x+3)e^{-x-1}$

d) $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{2x}$

3. Použitím L'Hospitalovho pravidla vypočítajte limity.

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^5+1}{x^4-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-3}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-x}{\ln(1-x^2)}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\sin 3x-1}{e^{2x}-\cos x}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln(x^2+1)}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-xe^{-x}}{e^x-x-1}$

4. Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

5. Vyšetrite priebeh funkcie a načrtnite jej graf (D(f), nulové body, spojitosť, párnosť, nepárnosť, periodičnosť, asymptoty, intervaly monotónnosti, konvexnosti a konkávnosti, lokálne extrémy, inflexné body, graf obor hodnôt)

a) $f(x)=x^3-3x$ b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

c) $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

g) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ h) $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

Výsledky

1a) na $(-\infty, -3\rangle$ a $\langle 0, 3\rangle$ klesajúca, na $\langle -3, 0\rangle$, $\langle 3, \infty)$ rastúca, ostré l.min. $f(-3) = f(3) = -72$, o.l.max. $f(0) = 9$;
1b) Na $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$ klesajúca, l. extrémy nem.
1c) na $(-\infty, 0)$ kles., na $\langle 0, \infty)$ rast., $f(0) = e$ o.l.min.,
1d) na $(0, 1), (1, e\rangle$ kles., na $\langle e, \infty)$ rast., $f(e) = e$ o.l.min.,
2a) $y = x - \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$, $y = x + \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$,
2b) $y = x + 1$ v $\pm\infty$, $x = 2$, $x = -1$,
2c) $y = 0$ v $+\infty$, 2d) $y = 0$ v $-\infty$, $x = 1$,
3a) $-\frac{5}{4}$, b) 0, c) 1, d) 0, e) 1 (nie je možné použiť L'Hospitalovo pravidlo!), 3f) $\frac{1}{4}$, 3g) -1, 3h) $\frac{3}{2}$, 3i) $\frac{1}{2}$, 3j) 2.
4a) 0, 4b) 0, 4c) 0, 4d) $e^{-\frac{1}{2}}$.
5a) $D(f) = R$, nepárna, na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$ rastúca, na $\langle -1, 1\rangle$, klesajúca, o.l.min $f(1) = -2$, o.l.max. $f(-1) = 2$; na $(-\infty, 0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0, \infty)$ r. konvexná, i.b. $x = 0$, asymptoty nemá;
5b) $D(f) = (0, \infty)$, na $(0, e\rangle$ rastúca, na $\langle e, \infty)$, klesajúca, o.l.max. $f(e) = \frac{1}{e}$; na $(0, \sqrt{e^3}\rangle$ r. konkávna, na $\langle \sqrt{e^3}, \infty)$ r. konvexná, i. b. $x = \sqrt{e^3}$, asymptoty $x = 0$, $y = 0$;
5c) $D(f) = R \setminus \{-1\}$, na $(-\infty, -2\rangle$ a $\langle 0, \infty)$ rastúca, na $\langle -2, -1)$ a $(-1, 0\rangle$ klesajúca, o.l.min $f(0) = 0$, o.l.max. $f(-2) = -4$; na $(-\infty, -1)$ r. konkávna, na $(-1, \infty)$ r. konvexná, i.b. nemá, asymptoty $x = -1$, $y = x - 1$;
5d) $D(f) = R$, nepárna, na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$ klesajúca, na $\langle -1, 1\rangle$, rastúca, o.l.min $f(-1) = -\frac{1}{2}$, o.l.max. $f(1) = \frac{1}{2}$; na $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a $\langle \sqrt{3}, \infty)$ r. konvexná, na $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$ r. konkávna, i.b. $x = \pm\sqrt{3}$, asymptota $y = 0$;
5e) $D(f) = R \setminus \{-1, 1\}$, párna, na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0\rangle$ klesajúca, na $\langle 0, 1)$ a $(1, \infty)$ rastúca, o.l.min $f(0) = 1$, na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ r. konkávna, na $(-1, 1)$ r. konvexná, i.b. nemá, asymptoty $y = 0$, $x = \pm 1$;
5f) $D(f) = R \setminus \{-1\}$, na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0\rangle$ klesajúca, na $\langle 0, \infty)$ rastúca, o.l.min $f(0) = 1$, na $(-\infty, -1)$ r. konkávna, na $(-1, \infty)$ r. konvexná, i.b. nemá, asymptoty $x = -1$;
5g) $D(f) = R$, na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$ rastúca, na $\langle -1, 1\rangle$ klesajúca, o.l.min $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$, o.l.max $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$, na $(-\infty, 0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0, \infty)$ r. konvexná, i.b. $x = 0$, asymptoty $y = x - \pi$ v $+\infty$, $y = x + \pi$ v $-\infty$;
5h) $D(f) = R$, na $(-\infty, -1\rangle$ rastúca, na $\langle 1, \infty)$ klesajúca, o.l.max $f(-1) = e$, na $(-\infty, 0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0, \infty)$ r. konvexná, i.b. $x = 0$, asymptoty $y = 0$ v $+\infty$.

6 POSTUPNOSTI

1. Vypočítajte limity postupností

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3^n}{2^{n+1}}$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{2n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n}$, d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)$.

2. Zistite, či je postupnosť konvergentná alebo divergentná, ak

$$\left\{\frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{n\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

3. Zistite, či je postupnosť $\left\{\cos n\frac{\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená. Nájdite aspoň dve konvergentné podpostupnosti.

Výsledky

1a) $-\infty$, b) 0, c) e^2, d) $\frac{3}{2}$, 2. konvergentná postupnosť, 3. $\{1\}_{k=1}^{\infty}$, $n = 4k$, $\{0\}_{k=0}^{\infty}$, $n = 2k + 1$.

7 NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ RADY

1. Nájdite postupnosť čiastočných súčtov radu, vyšetrite konvergenciu radu.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

2. Vyšetrite konvergenciu radu a nájdite súčet radu (ak existuje).

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{2^{2n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^{-n}}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

3. Pomocou porovnávacieho kritéria vyšetrite konvergenciu radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 2}$

4. Pomocou D'Alembertovho limitného kritéria vyšetrite konvergenciu radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)3^n}{(n-1)!}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$

5. Pomocou Cauchyho limitného kritéria vyšetrite konvergenciu radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3^n}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n^2}\right)^{n^3}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{2n}$

6. Vyšetrite konvergenciu radu so striedavými znamienkami. Rozhodnite, či je rad absolútne alebo relatívne konvergentný.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 - 1}$

Výsledky

1.a) $\{1-\frac{1}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, konvergentný, b) $\{\frac{3}{2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\}_{n=2}^{\infty}$, konvergentný. 2.a) konvergentný, $s=\frac{1}{5}$, b) divergentný, c) konvergentný, $s=-\frac{2}{3}$, d) konvergentný, $s=\frac{39}{10}$, e) konvergentný, $s=\frac{1}{3}$,. 3.a)–d) konvergentný, e), f) divergentný. 4. a) divergentný, b), c) konvergentný, d) divergentný. 5.a)–c) konvergentný, d) divergentný, e) konvergentný, f) divergentný. 6.a) absolútne konvergentný, b) divergentný, c) relatívne konvergentný, d) absolútne konvergentný.

8 MOCNINOVÉ RADY

1. Nájdite obor konvergencie a súčet radu.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n-1}}(x+2)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}x^n$

2. Nájdite obor konvergencie mocninových radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}(x+1)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^{2n}}(x-2)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}(x-5)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n}(x+1)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-2)}{2^n}(x+3)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

3. Nájdite obor konvergencie mocninových radov.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^nx^{4n}}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n+1}}{2n+1}$

4. Nájdite Taylorov rad funkcie f v bode a.

a) $f(x)=e^{2x+1},\ a=-1$ b) $f(x)=\cos^2 x,\ a=0$

c) $f(x)=\sin 2x,\ a=\pi$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ a=1$

Výsledky

1.a) $O_k=(2,4)$, $s(x)=\frac{1}{4-x}$, b) $O_k=(-3,1)$, $s(x)=\frac{1}{1-x}$, c) $O_k=(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$, $s(x)=\frac{-9}{2x+1}$, d) $O_k=(-2,2)$, $s(x)=\frac{x}{x+2}$, 2.a) $O_k=\langle -3,1)$, b) $O_k=(0,4)$, c) $O_k=R$, d) $O_k=\{-1\}$, e) $O_k=(-5,-1)$, f) $O_k=\langle -\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$, 3.a) $O_k=\langle -\sqrt{3},\sqrt{3}\rangle$, b) $O_k=(-4,-2)$.

4.a) $e^{2x+1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{e\cdot n!}(x+1)^n,\ \forall x\in R,$

4.b) $\cos^2 x=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ \forall x\in R,$

4.c) $\sin 2x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1},\ \forall x\in R,$

4.d) $\dfrac{1}{x+1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n,\ \forall x\in(-1,3).$