Polynómy

Definícia. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in C$. Výraz $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ sa nazýva *polynóm* s koeficientami $a_0, a_1, \dots, a_n$. Ak $a_n \neq 0$, tak sa číslo n sa nazýva *stupeň* polynómu $f(x)$ ($n = \deg f$). Ak $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, tak $\deg f = -\infty$. Množinu všetkých polynómov s komplexnými koeficientami budeme označovať $P(C)$.

Podobne, $P(Z), P(Q), P(R)$ sú množiny všetkých polynómov s celočíselnými, racionálnymi, resp. reálnymi koeficientami.

Polynóm $f \in P(C)$ určuje funkciu $x \mapsto f(x)$, pre polynómy z $P(C)$ platí aj veta o jednoznačnosti:

Veta. *Nech $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in P(C)$, $g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0 \in P(C)$ ($a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$) určujú tú istú funkciu, t.j. pre každé $x \in C$ platí $f(x) = g(x)$.*

Potom sa rovnajú aj koeficienty polynómov f, g, t.j.

$$m = n, \quad a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n\,.$$

Predchádzajúca veta platí aj pre nulový polynóm a tiež v $P(Z), P(Q), P(R)$.

Definícia.

1) Polynóm $f(x) \in P(C)$, resp. $f(x) \in P(R)$ sa nazýva *ireducibilný* v $P(C)$, resp. v $P(R)$, ak neexistujú $g(x), h(x) \in P(C)$, resp. $\in P(R)$, stupňa aspoň 1, pre ktoré $f(x) = g(x)h(x)$.
2) $c \in C$ je *koreň* polynómu $f(x) \in P(C)$, ak je hodnota $f(c) = 0$.

Veta. *Ak $f(x) \in P(C)$, $c \in C$, tak zvyšok po delení $f(x) : (x - c)$ je hodnota $f(c)$; špeciálne, ak c je koreň polynómu f, tak sa dá deliť $f(x) : (x - c)$ bezo zvyšku (píšeme aj $(x - c) \mid f(x)$).*

Dôkaz. Delením dostaneme podiel $g(x)$ a zvyšok je polynóm $r(x)$, $\deg r(x) < deg(x-c) = 1$. Teda $r(x) = r \in C$, a teda $f(x) = (x - c)g(x) + r \implies f(c) = (c - c)g(c) + r = r$.

Teraz môžeme ešte spresniť definíciu koreňa polynómu z $P(C)$

Definícia. Nech $f(x) \in P(C)$, $k \in N$. Číslo $c \in C$ sa nazýva *koreň násobnosti* k (k-násobný koreň) polynómu f, ak $(x - c)^k | f(x)$, ale $(x - c)^{k+1}$ nie je deliteľom polynómu f. Všeobecnejšie, v $P(R)$ sa ireducibilný polynóm $g(x) \in P(R)$ nazýva *k-násobný ireducibilný deliteľ* polynómu f, ak $[g(x)]^k \mid f(x)$, ale g^{k+1} nie je deliteľom polynómu f.

Inými slovami $\exists\, h(x) \in P(R)$ také, že $f(x) = [g(x)]^k h(x)$ a polynóm $g(x)$ nie je deliteľom polynómu $h(x)$.

Hornerova schéma. Delenie $f(x) : (x - c) = g(x)$ so zvyškom r sa dá napísať do nasledujúcej tabuľky

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0	koeficienty polynómu f	
c		cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\dots$	cb_1	cb_0		
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$r = f(c)$	koeficienty polynómu g	zvyšok

V treťom riadku je súčet čísel v prvých dvoch riadkoch.

Platnosť Hornerovej schémy ukážeme na príklade $\deg f = 3$; $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$.

$$f(x) = (x - c)(b_2x^2 + b_1x + b_0) + r = b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x - cb_2x^2 - cb_1x - cb_0 + r\,,$$

teda

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3x^3 + \qquad a_2x^2 + \qquad a_1x + \quad a_0 \\ &= b_2x^3 + (b_1 - cb_2)x^2 + (b_0 - cb_1)x + (r - cb_0) \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov dostaneme

$$b_2 = a_3\,,\ b_1 - cb_2 = a_2 \implies b_1 = a_2 + cb_2\,,\ b_0 - cb_1 = a_1 \implies b_0 = a_1 + cb_1\,,\ r - cb_0 = a_0 \implies r = a_0 + cb_0\,.$$

Rozklad na súčin ireducibilných polynómov.

Komplexné čísla sme zaviedli tak, aby mal polynóm x^2+1 koreň. Pre polynómy s komplexnými koeficientami (teda špeciálne aj z $P(R)$) platí viac:

Veta (Základná veta algebry)**.** *Každý polynóm s komplexnými koeficientami stupňa aspoň 1 má koreň $c \in C$.*

Veta (o komplexných koreňoch reálnych polynómov)**.** *Ak je $c \in C$ koreňom polynómu $f \in P(R)$, tak je aj komplexne združené číslo $\overline{c}$ koreňom polynómu f.*

Dôkaz. Ak $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in P(R)$ a $c \in C$ je koreeň polynómu f, tak

$$0 = f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n \implies 0 = \overline{0} = \overline{a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n}\,.$$

Pretože $\overline{c^k} = (\overline{c})^k$ a $a_k \in R \implies \overline{a_k} = a_k$ dostaneme

$$f(\overline{c}) = a_0 + a_1\overline{c} + a_2\overline{c}^2 + \cdots + a_n\overline{c}^n = \overline{a_0 + a_1c + a_2c^2 + \cdots + a_nc^n} = \overline{f(c)} = 0\,.$$

Zo základnej vety algebry vyplýva, že ireducibilné polynómy v $P(C)$ majú stupeň 1. Pre polynómy $f \in P(R)$ dostaneme:

Ak $c = a + ib$ je koreň polynómu $f \in P(R)$, tak aj $\overline{c} = a - ib$ je jeho koreň. Preto je $(x-c)(x-\overline{c}) = (x-a-ib)(x-a+ib) = (x-a)^2 + b^2$ deliteľom polynómu $f(x)$. Teda v $P(R)$ sú ireducibilnými len polynómy stupňa 1 alebo polynómy stupňa 2, ktoré nemajú reálne korene (t.j. majú záporný diskriminant). Teda každý polynóm $f \in P(R)$, $\deg f = n$, sa dá rozložiť na súčin ireducibilných polynómov

(i) v $P(C)$: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_0 = a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_m)^{k_m}$, kde $c_1, c_2, \dots, c_m \in C$ sú korene polynómu f násobnosti $k_1, k_2, \dots, k_m \in N$ pričom platí $\sum\limits_{a=1}^{m} k_a = \deg f$.

(ii) v $P(R)$: $f(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}\cdots(x-c_g)^{k_g}(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}\cdots(x^2+p_hx+q_h)^{\ell_h}$, $\sum\limits_{a=1}^{g} k_a + 2\sum\limits_{b=1}^{h} \ell_b = \deg f$ a $p_j^2 - 4q_j < 0$ pre všetky $j = 1, 2, \dots, h$, $c_1, c_2, \dots, c_g$ sú reálne korene polynómu f násobnosti $k_1, k_2, \dots, k_g \in N$

Racionálne korene polynómu $f \in P(Z)$**.**

Veta. *Nech $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in P(Z)$, $a_n \neq 0$. Nech $c = \frac{p}{q}$, kde $q \in N$, $p \in Z$ a čísla p, q sú nesúdeliteľné (t.j. zlomok sa nedá krátiť). Ak je c koreň polynómu f, tak je p deliteľom čísla a_0 a q deliteľom čísla a_n.*

Dôkaz. Ak je $\frac{p}{q}$ koreň polynómu $f(x)$ tak

$$\begin{aligned}
0 = f\big(\tfrac{p}{q}\big) &= a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 \;\Big/\cdot q^n \\
\implies 0 &= a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \\
\implies -a_0q^n &= a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} \\
-a_0q^n &= p\underbrace{\big(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1q^{n-1}\big)}_{a} = pa\,,\ a \in Z
\end{aligned}$$

Teda číslo p je deliteľom čísla a_0q^n a pretože p a q sú nesúdeliteľné musí byť p deliteľom čísla a_0.

Podobne

$$\begin{aligned}
0 &= a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \;\Big/ - a_np^n \\
-a_np^n &= a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \\
&= q\big(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\big) \\
&\implies q \mid a_n\,.
\end{aligned}$$

Príklad. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $f(x) = 4x^6+6x^5-10x^4-7x^3+6x^2-5x+6$ a napíšte ho ako súčin ireducibilných polynómov v $P(R)$.

Riešenie:
Ak $\frac{p}{q}$ je koreň $f(x)$, tak $p \in Z$, $p \mid 6$ a $q \mid 4$, teda
$p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$, $q \in \{1,\ 2,\ 4\}$, čiže možné racionálne korene sú z množiny $\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{3}{4}\}$. Teraz stačí týchto 16 čísel dosadiť do daného polynómu a zistiť, pre ktoré z nich výjde hodnota 0. Urobíme to pomocou Hornerovej schémy a zisťujeme aj násobnosť koreňa:

	4	6	-10	-7	6	-5	6	
		4	10	0	-7	-1	6	
1	4	10	0	-7	-1	-6	$\underline{0}$	$\Longrightarrow f(x) = (x-1)(4x^5+10x^4-7x^2-x-6)$
		4	14	14	7	6		
1	4	14	14	7	6	$\underline{0}$		$\Longrightarrow f(x) = (x-1)^2(4x^4+14x^3+14x^2+7x+6)$
		4	18	32	39			
1	4	18	32	39	$\underline{45 \neq 0}$			

Teraz stačí hľadať korene polynómu $4x^4+14x^3+14x^2+7x+6$, ktorý má iba kladné koeficienty, preto môže mať len záporné korene. Teda budeme už skúšať iba $c \in \{-1,\ -2,\ -3,\ -6,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\}$ znova pomocou Hornerovej schémy.

	4	14	14	7	6	
		-8	-12	-4	-6	
-2	4	6	2	3	$\underline{0}$	$\Longrightarrow f(x) = (x-1)^2(x+2)(4x^3+6x^2+2x+3)$
		-8	4	-12		
-2	4	-2	6	$-9 \neq 0$		

Teraz stačí hľadať korene polynómu $g(x) = 4x^3+6x^2+2x+3$, ktorý môže mať korene $\{-3,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\}$
Pomocou Hornerovej schémy dostaneme $g(-3) \neq 0$, $g(-\frac{1}{2}) \neq 0$,

	4	6	2	3	
		-6	0	-3	
$-\frac{3}{2}$	4	0	2	$\underline{0}$	$\Longrightarrow g(x) = (x+\frac{3}{2})(4x^2+2) = 2(x+\frac{3}{2})(2x^2+1)$

<u>Výsledok</u>: $f(x) = 4(x-1)^2(x+2)(x+\frac{3}{2})(x^2+\frac{1}{2})$ má racionálne korene $c_{1,2} = 1$, $c_3 = -2$, $c_4 = -\frac{3}{2}$.
Okrem toho má dvojicu komplexných koreňov $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Racionálne funkcie

Definícia. Nech $p, q \in P(C)$, $q \neq 0$. Fuunkcia tvaru $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sa nazýva *racionálna funkcia*. Definovaná je v každom komplexnom čísle, ktoré nie je koreňom menovateľa $q(x)$.

Ak je $\deg p < \deg q$, tak hovoríme, že $f(x)$ je *rýdzoracionálna*.

Ak je $\deg p \geq \deg q$, tak delením $p(x) : q(x)$ dostaneme $p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg q$. Odtiaľ dostávame

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{g(x) \cdot q(x) + r(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

a teda platí

Veta. *Každá racionálna funkcia f je súčtom polynómu g a rýdzoracionálnej funkcie (ak je f rýdzoracionálna tak je polynóm g nulový).*

„Najjdenoduchšie" rýdzoracionálne funkcie, ktorých menovateľom je mocnica ireducibilného polynómu sa nazývajú elementárne zlomky.

Definícia. *Elementárnym zlomkom nad C* sa nazýva funkcia tvaru

(i) $\dfrac{a}{(x-c)^k}$, kde $a, c \in C$, $k \in N$.

Elementárnym zlomkom nad R sa nazýva funkcia jedného z typov

(ii) $\dfrac{a}{(x-c)^k}$, kde $a, c \in R$, $k \in N$,

(iii) $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, kde $a, b, p, q \in R$, $k \in N$, $p^2 - 4q < 0$.

Úloha. Rozhodnite, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad R.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$,

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+1}$,

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$,

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$,

f) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\right)^3$,

Veta. *Každá racionálna funkcia f nad C (nad R) sa dá jednoznačne až na poradie sčítancov napísať ako súčet polynómu a konečného počtu elementárnych zlomkov nad C (nad R).*

Naznačíme iba, ako sa matematickou indukciou (vzhľadom na stupeň menovateľa) dokáže táto veta nad poľom C. Predpokladajme preto, že $c \in C$ je k-násobný koreň menovateľa rýdzoracionálnej funkcie, t.j

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-c)^k g(x)}\,, \quad k \in N\,,\ g(c) \neq 0\,, \quad k + \deg g > \deg p\,.$$

Potom $\exists a \in C$ také, že $p(c) - ag(c) = 0$, t.j. $a = \dfrac{p(c)}{g(c)}$. Inými slovami c je koreň polynómu $p(x) - ag(x)$ a preto $p(x) - ag(x) = (x-c)h(x)$, $h \in P(C)$. Teda

$$\frac{p(x)}{(x-c)^k g(x)} = \frac{(p(x) - ag(x)) + ag(x)}{(x-c)^k g(x)} = \frac{(x-c)h(x) + ag(x)}{(x-c)^k g(x)} = \frac{h(x)}{(x-c)^{k-1} g(x)} + \frac{a}{(x-c)^k}$$

Rozklad na súčet elementárnych zlomkov sa dá urobiť metódou neurčitých koeficientov, ak poznáme kanonický rozklad menovateľa na súčin ireducibilných polynómov. Ukážeme to na príklade:

Úloha. Funkciu $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ rozložte na súčet polynómu a elementárnych zlomkov.

Riešenie. Funkcia nie je rýdzoracionálna (stupeň čitateľa je väčší ako stupeň menovateľa). Najprv delením dostaneme

$$(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 2x + 1\,, \qquad \text{zvyšok } 2x^2 - 7x + 3$$

teda

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Menovateľa rozložíme na súčin $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$, teraz hľadáme čísla a, b, c také, aby

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

Obe strany predchádzajúcej rovnosti násobíme menovateľom $(x-1)(x+1)(x-2)$ a dostaneme

$$2x^2 - 7x + 3 = a(x+1)(x-2) + b(x-1)(x-2) + c(x-1)(x+1)\,.$$

Čísla a, b, c podľa predchádzajúcej vety sú jednoznačne určené. V tomto prípade ich najrýchlejšie určíme tak, že do oboch strán predchádzajúcej rovnosti dosadíme vhodné čísla (korene menovateľa):

$$\begin{aligned}
x = 1\colon &\quad -2 = a\cdot(1+1)(1-2) + b\cdot 0 + c\cdot 0 = -2a &&\Longrightarrow a = 1\\
x = -1\colon &\quad 12 = a\cdot 0 + b\cdot(-1-1)(-1-2) + c\cdot 0 = 6b &&\Longrightarrow b = 2\\
x = 2\colon &\quad -3 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot(2-1)(2+1) = 3c &&\Longrightarrow c = -1
\end{aligned}$$

Druhá možnosť je pravú stranu roznásobiť:

$$2x^2-7x+3 = a(x+1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)(x+1) = (a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)$$

a použiť fakt, že polynómy sa rovnajú, ak majú tie isté koeficienty, teda riešiť sústavu s neznámymi a, b, c:

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 2\\
-a - 3b &= -7\\
-2a + 2b - c &= 3
\end{aligned}$$

Pravidlá ako určujeme tvary elementárnych zlomkov pri rozklade rýdzoracionálnych funkcií.

1. **Počet neznámych neurčitých koeficientov** sa rovná **stupňu menovateľa**.
2. Ak je v rozklade menovateľa mocnina $(x-c)^k$, tak k nej hľadáme elementárne zlomky (k neurčitých koeficientov)

$$\frac{a_1}{(x-c)^k}\,,\quad \frac{a_2}{(x-c)^{k-1}}\,,\ldots,\quad \frac{a_{k-1}}{(x-c)^2}\,,\quad \frac{a_k}{(x-c)}\,.$$

3. Podobne Ak je v rozklade menovateľa mocnina $(x^2+px+q)^k$, $p^2 - 4q < 0$, tak hľadáme $2k$ neurčitých koeficientov v zlomkoch

$$\frac{a_1x + b_1}{(x^2+px+q)^k}\,,\quad \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,,\ldots \frac{a_{k-1}x+b_{k-1}}{(x^2+px+q)^2}\,,\quad \frac{a_kx+b_k}{(x^2+px+q)}\,.$$

Príklad. Napíšeme teraz tvar rozkladu na elementárne zlomky nad R niektorých rýdzoracionálnych funkcií, t.j. predpokladáme, že stupeň menovateľa je väčší ako stupeň čitateľa ($A, B, C, \ldots$ sú neurčité koeficienty z R):

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{(x-2)^4} &= \frac{A}{(x-2)^4} + \frac{B}{(x-2)^3} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)}\\
\frac{p(x)}{(x-2)^2(x+1)^2} &= \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)}\\
\frac{p(x)}{(x^2-3x+3)^2(x+1)^2} &= \frac{Ax+B}{(x^2-3x+3)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2-3x+3)} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{(x+1)}
\end{aligned}$$

Úloha. Danú racionálnu funkciu napíšte ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad R.

a) $\dfrac{2x^3+4x^2+5x+1}{(x^2+2x+2)^2}$

b) $\dfrac{-x^2-2x+1}{x^3+6x^2+12x+8}$

c) $\dfrac{1}{2x^2+5x-12}$

d) $\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}$

e) $\dfrac{5x^2-14x+17}{(x-5)^2(x-1)^2}$

f) $\dfrac{4x^2+3x+3}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$