Matematika 1E SW5

Ľ. Marko

December 3, 2017

CONTENTS

I Lineárna algebra. 9

1 Reálne a komplexné čísla. 13
Mocnina komplexného čísla. 16
Odmocnina komplexného čísla. 17
Cvičenia. 18

2 Sústavy lineárnych rovníc. 21
Jedna rovnica s jednou neznámou. 21
Sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi. 21
Cvičenia 26

3 Maticové operácie. 29
Lineárna závislosť a nezávislosť v $\boldsymbol{R}^n$ $(\boldsymbol{C}^n)$. 29
Súčet, násobok matice číslom a súčin matíc 30
Výpočet inverznej matice 32
Cvičenia 33
Determinant štvorcovej matice. 36
Výpočet inverznej matice pomocou determinantov a Cramerovo pravidlo. 38
Cramerovo pravidlo. 39
Cvičenia. 40

4 Polynómy. 43
Polynómy - základné pojmy. 43
Delenie polynómov. 44
Racionálne funkcie. 48
Postup pri rozklade racionálnej funkcie $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{R}$). 49
Cvičenia 51

II Matematická analýza 55

5 Reálne funkcie jednej reálnej premennej. 59
Pojem funkcie. 59
Operácie s funkciami. 60
Graf funkcie. 61
Vlastnosti funkcií. 62
Ohraničené funkcie. 62
Monotónne funkcie. 62

Párne a nepárne funkcie. . . . 63
Periodické funkcie. . . . 63
Inverzná funkcia. . . . 63
Elementárne funkcie. . . . 65
Trigonometrické funkcie. . . . 66
Cvičenia. . . . 67

6 Limita a spojitosť funkcie. 69
Pomocné pojmy. . . . 69
Infimum a supremum číselnej množiny. . . . 69
Okolie bodu. . . . 69
Definícia limity funkcie v bode. . . . 71
Intuitívny pojem limity. . . . 71
Definícia limity funkcie v bode. . . . 71
Negácia existencie limity. . . . 73

Vety o limitách. . . . 74
Limita zúženia funkcie. . . . 76

Nevlastná limita. . . . 77
Cvičenia. . . . 80

Spojité funkcie. . . . 83
Spojitosť funkcie v bode. . . . 83

Niektoré vlastnosti spojitých funkcií na uzavretom intervale. . . . 86

Cvičenia. . . . 88
Diferencovateľné funkcie. . . . 91

Derivácia funkcie. . . . 91
Základné vlastnosti derivácií. . . . 93
Diferenciál funkcie a pravidlá derivovania. . . . 94
Derivácie vyšších rádov. . . . 98
Cvičenia. . . . 99
Priebeh funkcie. . . . 101
Lokálne extrémy funkcií. . . . 101
Vlastnosti diferencovateľných funkcií. . . . 103
Taylorova veta. . . . 105
L' Hospitalovo pravidlo. . . . 106
Monotónne funkcie. . . . 108
Test prvou deriváciou. . . . 109
Konvexnosť, konkávnosť a inflexné body. . . . 111
Priebeh funkcie. . . . 114
Zisťovanie priebehu funkcie. . . . 115
Cvičenia. . . . 119

Postupnosti a rady reálnych čísel. . . . 129

Postupnosti. 129
Ohraničené postupnosti. 130
Monotónne postupnosti. 130
Nekonečné číselné rady. 132
Geometrické rady. 133
Rady s nezápornými členmi. 133
Porovnávacie kritérium. 134
Cauchyho odmocninové kritérium. 135
Rady so striedavými znamienkami a kritériá konvergencie pre rady s ľubovoľnými členmi. 135
Absolútna a relatívna konvergencia. 136
Cvičenia. 138

PREDHOVOR

Matematika je univerzálny jazyk pre fyzikálne a technické vedy. Preto je nutné aby študenti FEI STU Bratislava rozumeli základným matematickým pojmom z lineárnej algebry ako aj z matematickej analýzy. Tento učebný text z matematickej analýzy som vypracoval ako učebný text pre študijné odbory AM, ENE, ET, JFI počas zimného semestra školského roku 2017/2018 .

Part I

Lineárna algebra.

Mnohé fyzikálne a elektrotechnické aplikácie si vyžadujú, aby študenti rozumeli základným pojmom z lineárnej algebry. Takisto operácie s maticami, a determinantami a základné poznatky z teórie polynómov nutne patria k "povinnej výbave" každého študenta FEI STU.

Chapter 1 REÁLNE A KOMPLEXNÉ ČÍSLA.

Theorem 1 *Nech* $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, *potom platí*

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $a + 0 = a$
4. $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $a\,(bc) = (ab)\,c$
7. $1a = a$
8. $ak\ a \neq 0,\ tak\ \exists \frac{1}{a} \in \boldsymbol{R}\ a\ platí\ \ a\frac{1}{a} = 1$
9. $a\,(b + c) = ab + ac$

V množine reálnych čísel $\boldsymbol{R}$ neexistuje číslo, ktoré by bolo riešením rovnice

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Aby sme odstránili tento defekt v číselnom systéme zavedieme nové číslo, ktoré označíme i a voláme imaginárna jednotka. Toto číslo spĺňa základné zákony algebry: asociatívny, komutatívny a distributívny zákon a okrem toho rovnosť

$$i^2 = -1. \tag{1.2}$$

Potom rovnica (1) má dva korene i a $-i$.

Definition 2 *Výraz tvaru* $z = x + iy$, *kde* $x,\ y \in \boldsymbol{R}$ *sa nazýva komplexné číslo. Takýto tvar komplexných čísel sa nazýva algebrický alebo kartézsky tvar komplexného čísla* z. *Reálne číslo* x *sa nazýva reálna časť komplexného čísla* z, *reálne číslo* y *nazývame imaginárna časť komplexného čísla* z, *čo označujeme* $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$. *Množinu všetkých komplexných čísel budeme označovať* $\boldsymbol{C}$ *a množinu všetkých bodov* $(x,\ y)$ *v rovine* Oxy, *ktoré odpovedajú komplexným číslam* $x + iy$ *nazývame komplexná rovina. Existuje jednoznačné priradenie medzi* $\boldsymbol{C}$ *a množinou všetkých komplexných bodov v komplexnej rovine a odteraz nebudeme rozlišovať medzi týmito množinami.*

Geometricky komplexné číslo $z = x + iy$ odpovedá bodu so súradnicami $(x,\ y)$ v rovine Oxy alebo vektoru $\boldsymbol{R} = \overline{(x,\ y)}$.

V $\boldsymbol{C}$ sú operácie sčítania a násobenia určené vzťahom (1.2) a 1.-9. z vety 1.1. Nech $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$. Súčet a rozdiel dvoch komplexných čísel

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

násobenie dvoch komplexných čísel

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,,$$

t.j. násobenie komplexných čísel v algebrickom tvare je definované ako násobenie polynómov s použitím rovností

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ldots .$$

Dve komplexné čísla $x + iy$ a $x - iy$ s rovnakými reálnymi časťami a opačnými imaginárnymi časťami sa nazývajú komplexne združené čísla. Komplexne združené číslo k číslu z budeme označovať $\overline{z}$ a v rovine Oxy sú to čísla symetrické podľa reálnej osi. Ak $z = x + iy$, potom $\overline{z} = x - iy$ a pretože komplexne združené číslo ku $x - iy$ je číslo $x + iy$ máme

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \\ \text{ak}\ \ z &\neq 0,\ \text{potom}\ \ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Veta 1 platí aj v $\boldsymbol{C}$.

Theorem 3 *Nech* $z, z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$, *potom platí*

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$
4. $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Example 4 *Vypočítajme a znázornime v* $\boldsymbol{C}$.

a) i^{23}, b) $\frac{1}{i}$, c) $\frac{2+3i}{i}$, d) $\frac{1+i}{2-i}$, e) $\frac{(2+i)^2}{1+i}$, f) $(1+i)^6$.

Poloha komplexného čísla $z = x + iy$ sa dá určiť aj použitím polárnych súradníc r, φ. Kladné reálne číslo r rovné vzdialenosti bodu $(x,\,y)$ odpovedajúceho bodu $z = x + iy$ od stredu súradnicového systému nazývame modul alebo absolútna hodnota komplexného čísla z a definujeme:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{t.j. } r = |z \cdot \overline{z}|^{\frac{1}{2}} = |\overline{z}| = |z|\,.$$

Uhol medzi osou o_x a vektorom $\overline{(x,\,y)}$ nazývame argument komplexného čísla $z = x + iy$ (amplitúda).

$$\varphi = \mathrm{Arg}\ z.$$

Modul komplexného čísla z je definovaný jednoznačne, ale pre argument máme

$$\mathrm{Arg}\ z = \{\arg z + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}\,,$$

čo chápeme tak, že pre dané komplexné číslo $z \in \boldsymbol{C}$ vieme nájsť nekonečne mnoho hodnôt jeho argumentu, preto zavádzame funkciu

$$\arg : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \to (-\pi,\,\pi\rangle\,,$$

ktorú nazývame hlavnou hodnotou (alebo hlavnou vetvou) argumentu z. Ľahko nahliadneme, že

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \ \text{ ak } \ x \neq 0,\ \operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{y} \ \text{ ak } \ y \neq 0.$$

Potom pre hlavnú hodnotu argumentu $\arg z$ za predpokladov, že

$$-\pi < \arg z \leq \pi \quad \text{a} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

dostávame

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pre} \quad x > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{pre} \quad x < 0,\ y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{pre} \quad x < 0,\ y < 0 \end{cases}.$$

Ľahko vidieť, že

$$|z| = |\overline{z}| \quad \text{a} \quad \arg\overline{z} = -\arg z.$$

Ak predpokladáme, že $\varphi = \arg z$, môžme definovať goniometrický (trigonometrický) tvar komplexného čísla z

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Použitím Eulerovej formuly

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

môžeme definovať exponenciálny tvar komplexného čísla z

$$z = |z|\, e^{i\varphi}.$$

Example 5 *Nájdite goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla a)* $1 - i$, *b)* 2, *c)* -3, *d)* $3i$, *e)* $-2i$, *f)* $-\sqrt{3} - i$.

Je jasné, že v množine komplexných čísel nemožno zaviesť usporiadanie ale je možné porovnávať moduly komplexných čísel. Napríklad

$$|10i| > |i| \quad \text{alebo} \quad |2 + 3i| < |6 + 5i|.$$

Násobenie dvoch komplexných čísel v trigonometrickom a v exponenciálnom tvare: ak $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_2 e^{i\varphi_2}$, potom máme

$$z = z_1 z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right),$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

čo implikuje

$$|z| = |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Pretože $-\pi < \arg z \leq \pi$ pre hlavné hodnoty dostaneme

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi, \pi\rangle \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 > \pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 < -\pi \end{cases} .$$

Delenie dvoch komplexných čísel v trigonometrickom a v exponenciálnom tvare: ak $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2} \neq 0$, potom dostaneme

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

a pre trigonometrický a exponenciálny tvar:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}\, z_1 \setminus \operatorname{Arg}\, z_2.$$

Pre hlavné hodnoty argumentu platia podobné pravidlá ako pre násobenie a pozorný čitateľ si ich iste odvodí aj sám.

Mocnina komplexného čísla.

Ak n je prirodzené číslo, potom aplikáciou pravidla pre násobenie komplexných čísel ľahko odvodíme, že ak $z = re^{i\varphi}$, potom

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi},$$

čo pre trigonometrický tvar dáva

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) .$$

Posledná rovnosť implikuje tzv. *Moivreovu formulu:*

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) ,$$

odkiaľ pre $n = 2$ máme

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \ \sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi$$

a pre $n = 3$ dostaneme

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3 \cos\varphi \sin^2\varphi, \ \sin 3\varphi = 3 \cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi$$

Odmocnina komplexného čísla.

Nech $z(\neq 0,\, \infty)$ je komplexné číslo a n je prirodzené číslo. Hľadáme všetky riešenia rovnice

$$w^n = z \tag{1.3}$$

Nech $z = re^{i\varphi}$ a $w = \rho e^{i\Theta}$. Potom máme

$$\rho^n e^{in\Theta} = re^{i\varphi},$$

čo implikuje

$$\rho^n = r \ \text{ a } \ n\Theta = \varphi + 2k\pi, \ \text{ pre } \ k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots \tag{1.4}$$

a (1.4) definuje jediné kladné riešenie ρ a množinu hodnôt Θ:

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \Theta = \Theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \tag{1.5}$$

Ak položíme $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$ v druhej rovnici (1.5) dostaneme n rôznych hodnôt Θ_k :

$$\Theta_0 = \frac{\varphi}{n},\ \Theta_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n},\ \Theta_2 = \frac{\varphi + 4\pi}{n},\ \ldots,\ \Theta_{n-1} = \frac{\varphi + 2\,(n-1)\,\pi}{n},$$

takých že ďalšie hodnoty Θ_k pre $k = \ldots,\, -n,\, -(n-1),\, \ldots,\, -2,\, -1,\, n,\, n+1,\, \ldots$ sa líšia od týchto hodnôt iba o násobok čísla 2π. Tak rovnice (1.5) definujú iba n rôznych hodnôt

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad \text{pre } \ k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1,$$

ktoré sú riešeniami rovnice (1.3). Ak komplexné číslo z zapíšeme v trigonometrickom tvare $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$ a korene rovnice (1.3) napíšeme tiež v trigonometrickom tvare:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{pre } \ k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1. \tag{1.6}$$

Formula (1.6) implikuje, že každá z rôznych hodnôt w_k má ten istý modul $\sqrt[n]{|z|}$ a ich argumenty sa líšia iba o hodnotu $\frac{2\pi}{n}$, čo znamená, že každé riešenie w_k rovnice (1.3) leží na kružnici so stredom v 0 a polomerom $\sqrt[n]{|z|}$ a argument prvej hodnoty $(k = 0)$ sa rovná $\frac{\varphi}{n}$. Túto hodnotu

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nazývame hlavnou vetvou n-tej odmocniny z komplexného čísla z.

Pre hodnoty $z = 0$ a $z = \infty$ definujeme jediné hodnoty odmocnín $w = 0$ a $w = \infty$.

Example 6 *Nájdite všetky riešenia rovnice* $z^3 = -8i$.

Solution 7 *Pretože* $-8i = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ *dostaneme*

$z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\ k = 0,\, 1,\, 2$

Teda máme

$k = 0,\ z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2.0.\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i,$

$k = 1,\ z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2.1.\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\,(0 + i) = 2i,$

$k = 2,\ z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2.2.\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i.\square$

Cvičenia.

1. Nájdite modul, argument a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

   (a) $1-\sqrt{3}i$, $\left[2,\ -\frac{\pi}{3}.\right]$

   (b) $-2+2i$, $\left[2\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right]$

   (c) -4, $[4,\ \pi]$

   (d) i^5. $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

2. Zapíšte nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

   (a) $1+\sqrt{3}i$, $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

   (b) $2+2i$, $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right]$

   (c) -2, $[2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=2e^{i\pi}]$

   (d) $-i^3$. $\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

   (a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$, $[-8]$

   (b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $[-1-i]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

   (a) $z^3=i$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_3=-i\right]$

   (b) $z^4=-1$, $\left[\begin{array}{c} w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ w_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right]$

   (c) $z^4=1-\sqrt{3}i$,
   $\left[\begin{array}{c} w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \\ w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right), w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) \end{array}\right]$

   (d) $z^4=1$, $[w_1=1, w_2=i, w_3=-1, w_4=-i]$

   (e) $z^3=-1$. $\left[w_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2=-1, w_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

5. Nájdite reálne čísla $r,\ s$ tak, aby platilo

   (a) $(2-4i)r+(3-5i)s=2i$ $[r=-3,\ s=2]$

   (b) $(-3-2i)r+(-1+2i)si=-6-5i$ $[r=4,\ s=-3]$

6. Kedy je súčet komplexných čísel $a+bi,\ c+di$ číslo

   (a) reálne, $[b=-d]$

   (b) imaginárne, $[b\neq-d]$

   (c) rýdzoimaginárne? $[a=-c,\ b\neq-d\,]$

7. Vypočítajte

   (a) $(2+3i)(3-4i)-(5-4i)$ $[13+5i]$

   (b) $(-2+3i)^3$ $[46+9i]$

   (c) $i^n,\ n \in \boldsymbol{N}$ $\left[\begin{array}{c} i \text{ pre } n=1+4k, \\ -1 \text{ pre } n=2+4k, \\ -i \text{ pre } n=3+4k, \\ 1 \text{ pre } n=4k \end{array}\right]$

   (d) $\dfrac{2}{-1+3i}$ $\left[-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\right]$

   (e) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$ $\left[-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i\right]$

8. Pre ktoré komplexné čísla $z=a+bi$ platí

   (a) $z=\overline{z}$ $[a \in \boldsymbol{R},\ b=0]$

   (b) $z^2=\overline{z}$ $\left[0, 1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

9. Vypočítajte absolútnu hodnotu komplexných čísel

   (a) $3-4i$ $[5]$

   (b) $\dfrac{(1+i)^{12}}{(1-i)^{10}}$ $\left[\begin{array}{c} \text{Najskôr použite exponenciály tvar.} \\ \text{Výsledok je 2} \end{array}\right]$

10. Napíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare komplexné čísla:

    (a) 5 $[5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{i0}]$

    (b) -3 $[3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3e^{i\pi}]$

    (c) $2i$ $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

    (d) $-i$ $\left[\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right) = e^{i\frac{3\pi}{2}}\right]$

    (e) $-\sqrt{3}-3i$ $\left[2\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}\right]$

    (f) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ $\left[2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\right]$

    (g) $1-\cos\alpha + i \sin\alpha$ $\left[\begin{array}{c} 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)},\ \text{ak } \alpha \in \langle 4k\pi, 2\pi+4k\pi\rangle \\ 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| e^{i\left(\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)},\ ak\ \alpha \in (2\pi+4k\pi, 4\pi+4k\pi) \end{array}\right]$

11. Vypočítajte

    (a) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$ $[\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha]$

    (b) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i \sin\varphi)}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right)\right]$

(c) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$ [-64]

12. Vyjadrite $\cos 5x,\ \sin 5x$ pomocou mocnín $\sin x,\ \cos x$.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Upravte } (\cos x + i\sin x)^5 \text{pomocou Moivrovej vety a binomickej vety.}\\ \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x\\ \sin 5x = \sin^5 x - 10\sin^3 x \cos^2 x + 5\sin x \cos^4 x\end{array}\right]$$

13. Riešte binomickú rovnicu

(a) $x^2 = 2i$ [$\pm(1+i)$]

(b) $x^2 = -8i$ [$\pm(2-2i)$]

(c) $x^2 = -8-6i$ [$\pm(1-3i)$]

(d) $x^3 = -i$ $\left[i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$

(e) $x^4 = -4$ [$1 \pm i, -1 \pm i$]

(f) $(\sqrt{3}+i)x^6 = 1-i$

$\left[\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19+24k}{72}\pi + i\sin\frac{19+24k}{72}\pi\right), k = 0,1,2,3,4,5\right]$

Chapter 2 SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNíC.

Jedna rovnica s jednou neznámou.

Rovnica

$$ax = b \tag{2.1}$$

je lineárna rovnica. Nech $a, b \in \boldsymbol{C}$, hľadáme $x \in \boldsymbol{C}$, ktoré ju spĺňa.

Theorem 8 *Nech $a, b \in \boldsymbol{C}$, potom ak*

1. $a \neq 0$, *tak* $x = \frac{b}{a}$ *je jediné riešenie rovnice (2.1), čo zapíšeme* $P = \left\{ \left(\frac{b}{a} \right) \right\}$.
2. $a = 0$, $b \neq 0$, *tak neexistuje riešenie rovnice (2.1) z* $\boldsymbol{C}$ *, čo zapíšeme* $P = \emptyset$.
3. $a = 0$, $b = 0$, *tak každé* $x \in \boldsymbol{C}$ *je riešenie rovnice (2.1) , čo zapíšeme* $P = \{(t), t \in \boldsymbol{C}\}$.

Ak $a, b \in \boldsymbol{R}$ rovnicu (2.1) môžme riešiť aj graficky. Priamky $p : y = ax$ a $q : y = b$ majú presne tri možnosti vzájomnej polohy.

1. pretínajú sa v jednom bode $p \cap q = \left\{ \left(\frac{b}{a}, b \right) \right\}$,
2. sú rovnobežné $p \parallel q$,
3. sú totožné $p \equiv q$.

Sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi.

Nech $m, n \in \boldsymbol{N}$, $a_{jk}, b_j \in \boldsymbol{C}$ pre $j \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, sú dané čísla,

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{2.2}$$

je sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, s koeficientami a_{jk} a s pravou stranou

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Riešiť sústavu (2.2) znamená nájsť množinu P všetkých usporiadaných n-tíc komplexných čísel, po dosadení ktorých do každej rovnice (2.2) za $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vznikne rovnosť.

Maticu Ak pravá strana $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tak (2.2) sa nazýva homogénna sústava. Zvislá čiara v rozšírenej matici sústavy (2.2) slúži len na vizuálne oddelenie pravej strany od koeficientov sústavy. Sústava lineárnych rovníc (2.2) je svojou rozšírenou maticou sústavy jednoznačne určená.

Definition 9 *Kartézskym súčinom n neprázdnych množín $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nazývame množinu*

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n\}.$$

Jej prvky nazývame usporiadané n-tice (stručne n-tice). Ak $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$, tak kartezsky súčin $M \times M \times \ldots \times M$ označujeme M^n. Dve n-tice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sa rovnajú

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Longleftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

Usporiadanú n-ticu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ komplexných čísel (komplexnú n-ticu) nazývame tiež n-členným aritmetickým vektorom krátko len vektorom. Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazývame zložkami (súradnicami) vektora $\mathbf{x}$.

Na množine $\mathbf{C}^n$ definujeme operáciu súčtu dvoch n-tíc, ktorú budeme označovať $+$, a súčinu komplexného čísla a n-tice, ktorú budeme označovať $.$.

Definition 10 *$\boldsymbol{C}^n$ $(\boldsymbol{R}^n)$ označuje množinu všetkých usporiadaných n-tíc komplexných (reálnych) čísel. Ak*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{C}^n, \alpha \in \boldsymbol{C},$$

potom

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
2. $\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$
3. $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \boldsymbol{C}^n$ *nazývame nulová n-tica*
4. $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ *n-tica opačná k n-tici* $\mathbf{x}$

Definition 11 *Tabuľka komplexných (reálnych) čísel $a_{jk} \in \boldsymbol{C}$ $(\boldsymbol{R})$ pre $j \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$$

nazývame maticou typu $m \times n$. Množinu všetkých matíc typu $m \times n$ budeme označovať $\boldsymbol{C}^{m \times n}$ $(\boldsymbol{R}^{m \times n})$. Usporiadané

n-tice $\mathbf{A}_{j*} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \end{pmatrix}$ *nazývame riadky matice* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_{*k} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$

stĺpce matice $\mathbf{A}$.

Pri riešení sústavy (2.2) budeme používať zápis:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame maticou sústavy (2.2) a maticu

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

rozšírenou maticou sústavy (2.2). Maticu $\mathbf{A}$ respektíve $\widetilde{\mathbf{A}}$ upravíme na maticu, ktorá má takú istú množinu P všetkých riešení, ale jej pomocou je jednoduchšie popísať P. Nasledujúce úpravy matice $\mathbf{A}$ nezmenia P, nazývame ich ERO

ERO1 vzájomná výmena dvoch riadkov $\mathbf{A}_{j*} \longleftrightarrow \mathbf{A}_{i*}, j \neq i$

ERO2 násobenie riadku konštantou $\alpha \neq 0$, $\mathbf{A}_{j*} \to \alpha \mathbf{A}_{j*}$

ERO3 pričítanie násobku riadku k inému riadku $\mathbf{A}_{j*} \to \mathbf{A}_{j*} + \alpha \mathbf{A}_{i*}$

Definition 12 *Prvý nenulový prvok zľava v riadku* $\mathbf{A}_{j*} -$ a_{jk} *sa nazýva vedúci prvok (pivot)* j*-teho riadku* $\mathbf{A}_{j*}$. *Matica* $\mathbf{A}$ *sa nazýva stupňovitá ak*

1. *pivot* $(j+1)$*-vého riadku je v stĺpci napravo od stĺpca, v ktorom je* j *-teho riadku a v stĺpci pod pivotom sú* 0
2. *každý nulový riadok je pod každým nenulovým riadkom matice* $\mathbf{A}$,*teda nulové riadky sú v spodnej časti matice.*

Matica $\mathbf{A}$ *sa nazýva redukovaná stupňovitá ak je stupňovitá a navyše všetky jej pivoty sa rovnajú* 1 *a aj nad nimi sú v stĺpci*
len nuly.

Ľahko vidieť, že pomocou ERO vznikne z $\mathbf{A}$ matica sústavy so zhodnou množinou všetkých riešení. Budeme teda upravovať rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú, alebo redukovanú stupňovitú maticu. Každú matica $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ možno pomocou ERO upraviť na jednoznačne určenú redukovanú stupňovitú maticu $\mathbf{B}$ typu $m \times n$. Budeme písať $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$

Example 13 *Riešme sústavu*

$$\begin{aligned} x_1 \; - x_2 &= -2 \\ -3x_1 \; + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Solution 14

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{\boldsymbol{R}_2:=\boldsymbol{R}_2+3\boldsymbol{R}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{\boldsymbol{R}_2:=-\boldsymbol{R}_2}{\sim}$$

$$\overset{\boldsymbol{R}_2:=-\boldsymbol{R}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\boldsymbol{R}_1:=\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Maticu upravujeme zľava zhora doprava dolu. Dostaneme jediné riešenie $\mathbf{x} = (1,3)$, *čo zapíšeme* $P = \{(1,3)\}$.□

Example 15 *Riešme sústavu*

$$\begin{array}{rl} 3x_1 - 2x_2 \ + x_3 & = 11 \\ x_1 \ + x_2 \ - 3x_3 & = 7 \\ 11x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = 10 \end{array} .$$

Solution 16

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\boldsymbol{R}_1:=\boldsymbol{R}_2}{\boldsymbol{R}_2:=\boldsymbol{R}_1}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\boldsymbol{R}_2:=\boldsymbol{R}_2-3\boldsymbol{R}_1}{\boldsymbol{R}_3:=\boldsymbol{R}_3-11\boldsymbol{R}_1}}$$

$$\underset{\sim}{\overset{\boldsymbol{R}_2:=\boldsymbol{R}_2-3\boldsymbol{R}_1}{\boldsymbol{R}_3:=\boldsymbol{R}_3-11\boldsymbol{R}_1}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -15 & 30 & -67 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\boldsymbol{R}_2:=-\frac{1}{5}\boldsymbol{R}_2}{\boldsymbol{R}_3:=\boldsymbol{R}_3-2\boldsymbol{R}_2}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{array}\right) = \mathbf{B}.$$

Z tvaru posledného riadku vyplýva, že sústava nemá riešenie, pretože odpovedá rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -37$. *Všimnime si, že* $\mathbf{B}$ *je stupňovitá matica. Môžeme ju upraviť na redukovanú stupňovitú maticu:*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\boldsymbol{R}_1:=\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2}{\boldsymbol{R}_3:=-\frac{1}{37}\boldsymbol{R}_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\boldsymbol{R}_1:=\boldsymbol{R}_1-5\boldsymbol{R}_3}{\boldsymbol{R}_2:=\boldsymbol{R}_2-2\boldsymbol{R}_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Posledná matica je redukovaná stupňovitá. □

Popísaný postup riešenia sústavy sa v prípade, že úpravu matice ukončíme dosiahnutím stupňovitej matice nazývame Gaussovou eliminačnou metódou, ak pokračujeme a ukončíme redukovanou stupňovitou maticou, potom ju nazývame Gaussovou-Jordanovou eliminačnou metódou.

Example 17 *Riešme sústavu vynechaním poslednej rovnice sústavy z príkladu 2.*

$$\begin{array}{rl} 3x_1 - 2x_2 \ + x_3 & = 11 \\ x_1 \ + x_2 \ - 3x_3 & = 7 \end{array} .$$

Solution 18 $\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$ *.Z tvaru redukovanej stupňovitej matice vyplýva, že sústava má nekonečne mnoho riešení, ktoré môžeme zapísať tak, že neznámu* x_3 *považujeme za parameter* $x_3 = a \in \boldsymbol{R}$, *potom* $P = \{(a+5, 2a+2, a), a \in \boldsymbol{R}\}$.□

Definition 19 *Nech* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ $\left(\boldsymbol{C}^{m\times n}\right)$ *a* $\mathbf{B}$ *je stupňovitá matica riadkovo ekvivalentná s* $\mathbf{A}$. *Počet nenulových riadkov (alebo počet pivotov) matice* $\mathbf{B}$ *sa nazýva hodnosť matice* $\mathbf{A}$.

Example 20 *Určme hodnosť matice*

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{rrrrr} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Solution 21

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(\mathbf{A}\right)=3.$$

Theorem 22 *(Frobéniova) Sústava lineárnych rovníc (2.2) má (aspoň jedno) riešenie vtedy a len vtedy ak sa hodnosť matice sústavy (2.2) rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy (2.2).*

Example 23 *Riešme sústavu lineárnych rovníc*

$$\begin{array}{c} 12x_1 \ -x_2 \ +5x_3 \ =30 \\ 3x_1 \ -13x_2 \ +2x_3=21 \\ 7x_1+2x_2+3x_3=15 \end{array}.$$

Solution 24

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -1 & 5 & 30 \\ 3 & -13 & 2 & 21 \\ 7 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(\mathbf{A}\right)=h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)=3 \text{ jedno riešenie } \Rightarrow P=\left\{(2,-1,1)\right\}.\square$$

Example 25 *Riešme sústavu lineárnych rovníc*

$$\begin{array}{c} 2x_1 \ +\left(2-i\right)x_2 \ =9 \\ -x_1 \ +x_2 \ =i \end{array}.$$

Solution 26

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 2 & 2-i & 9 \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ 2 & 2-i & 9 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ 0 & 4-i & 9+2i \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix}\Rightarrow h\left(\mathbf{A}\right)=h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)=2 \text{ jedno riešenie } P=\left\{(-i,2+i)\right\}.\square$$

Theorem 27 *Nech $\mathbf{A}\in \ \boldsymbol{C}^{m\times n}$ a $\widetilde{\mathbf{A}}\in \ \boldsymbol{C}^{m\times(n+1)}$ je rozšírená matice sústavy lineárnych rovníc. Potom platí:*

1. *Ak $h\left(\mathbf{A}\right)\neq h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)$, tak sústava nemá riešenie,*
2. *Ak $h\left(\mathbf{A}\right)=h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)=n$, tak sústava má práve jedno riešenie,*
3. *Ak $h\left(\mathbf{A}\right)=h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)=k<n$, tak sústava má nekonečne veľa riešení a na určenie množiny riešení je potrebné uvažovať $n-k$ parametrov.*

Remark 28 *Ak $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, tak (2.2) sa nazýva homogénna sústava, ak $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, tak (2.2) sa nazýva nehomogénna sústava.*

Corollary 29 *Každá homogénna sústava lineárnych rovníc má aspoň jedno riešenie.*

Cvičenia

1. Zistite, ktoré z matíc

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=(-1,\ 0,\ 2),\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{F}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3\\ 4\end{pmatrix},\qquad \mathbf{G}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{J}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{K}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0, & 1, & 2, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 2\\ 0, & 0, & -2\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{O}=\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0\\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1\end{pmatrix}$$

sú

(a) stupňovité, $[\mathbf{B},\ \mathbf{D},\ \mathbf{H},\ \mathbf{J},\ \mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi,\ k\in\mathbf{Z},\ \mathbf{L},\ \mathbf{O}]$

(b) redukované stupňovité? $[\mathbf{K}$ pre $\alpha = 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},\ \mathbf{L},\ \mathbf{O}]$

2. Nájdite redukovanú stupňovitú maticu, ktorá je riadkovo ekvivaletná s maticou

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\qquad \left[\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & -3\end{pmatrix}\right]$$

(b) $$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\qquad \left[\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4\\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix}\right]$$

3. Riešte sústavu lineárnych rovníc

(a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3\\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -3\\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 16\end{aligned}\qquad [P=\{(1,\ 3,\ 2)\}]$$

(b) $$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 3\\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 5\\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 8\end{aligned}\qquad \text{[nemá riešenie]}$$

(c)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 9 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_4 &= 18 \\ 7x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$\left[P = \left\{\left(\frac{2}{3},\ \frac{31}{6} + t,\ -\frac{7}{6} - t,\ 2t\right),\ t \in \boldsymbol{R}\right\}\right]$

(d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -2 \\ -x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[nemá riešenie]

(e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 4x_5 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -7 \\ 5x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 11x_5 &= 18 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$[P = \{(1 + a + b,\ a,\ -2,\ 3 + 2b,\ b),\ a, b \in \boldsymbol{R}\}]$

(f)
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[P = \left\{\left(\frac{a - 2b - 5c}{3},\ a,\ \frac{-b + 3c}{2},\ b,\ c\right),\ a, b, c \in \boldsymbol{R}\right\}\right]$$

Chapter 3 MATICOVÉ OPERÁCIE.

Lineárna závislosť a nezávislosť v $\boldsymbol{R}^n\,(\boldsymbol{C}^n)$.

Definition 30 *Nech* $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_k \in \boldsymbol{C}^n$ *a* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots, \alpha_k \in \boldsymbol{C}$.

1. $\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k$ *nazývame lineárna kombinácia vektorov* $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_k$,
2. *Hovoríme, že k -tica* $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_k\}$ *je lineárne nezávislá, ak platí implikácia* $\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k=\mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$,
3. *Ak k -tica* $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_k\}$ *nie je lineárne nezávislá, nazývame ju lineárne závislá.*

Definícia neplatí iba pre n *-tice* $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_k$, ale napríklad pre polynómy, matice, alebo funkcie.

Example 31 *Nech* $\mathbf{x}_1=(1,1,1)\,,\ \mathbf{x}_2=(1,1,-1)\,,\ \mathbf{x}_3=(1,-1,1)$ *vypočítajme lineárnu kombináciu* $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+3\mathbf{x}_3$.

Solution 32 $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+3\mathbf{x}_3=(1,1,1)-(1,1,-1)+3\,(1,-1,1)=(3,-3,5)\,.\square$

Example 33 *Zistime, či je* $\mathbf{b}$ *lineárnou kombináciou prvkov* $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3$, *kde*

1. $\mathbf{b}=(1,2,3)\,,\ \mathbf{b}_1=(1,1,1)\,,\ \mathbf{b}_2=(1,1,-1)\,,\ \mathbf{b}_3=(0,0,2)\,,$
2. $\mathbf{b}=(1,2,3)\,,\ \mathbf{b}_1=(1,2,0)\,,\ \mathbf{b}_2=(1,2,-1)\,,\ \mathbf{b}_3=(0,0,1)\,.$

Solution 34 1. *Hľadáme* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \boldsymbol{R}$ *také, že* $\mathbf{b}=\alpha_1\mathbf{b}_1+\alpha_2\mathbf{b}_2+\alpha_3\mathbf{b}_3$, *teda či má sústava*

$$\begin{aligned} \alpha_1 \ +\alpha_2 \ &= 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 &= 2 \\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3 &= 3 \end{aligned}$$

t.j. $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow h\left(\mathbf{A}\right)=2, h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right)=3$ *žiadne riešenie* $\mathbf{b}$ *nie je lineárnou*

kombináciou prvkov $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3$.

2. *Hľadáme* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \boldsymbol{R}$ *také, že* $\mathbf{b}=\alpha_1\mathbf{b}_1+\alpha_2\mathbf{b}_2+\alpha_3\mathbf{b}_3$, *teda či má sústava*

$$\begin{aligned} \alpha_1 \ +\alpha_2 \ &= 1 \\ 2\alpha_1+2\alpha_2 &= 2 \\ -\alpha_2+\alpha_3 &= 3 \end{aligned}$$

t.j.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow h(\mathbf{A}) = h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right) = 2 < 3$ *nekonečne mnoho riešení* $P = \{(4-p, -3+p, p), p \in \boldsymbol{R}\}$, $\mathbf{b}$ *je lineárnou kombináciou prvkov* $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3$.□

Súčet, násobok matice číslom a súčin matíc

Definition 35 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n}},\ \mathbf{B} = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n}} \in \boldsymbol{C}^{m\times n},\ \alpha \in \boldsymbol{C}$. *Potom* $\mathbf{A}+\mathbf{B} = (a_{jk}+b_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n}},\ \alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n}}$.

Definition 36 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le l}} \in \boldsymbol{C}^{m\times l},\ \mathbf{B} = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le l \\ 1\le k\le n}} \in \boldsymbol{C}^{l\times n}$. *Potom súčin matíc* $\mathbf{A}.\mathbf{B} = (c_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n}} \in \boldsymbol{C}^{m\times n}$ *definujeme takto* $c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jl}b_{lk} = \sum_{s=1}^{l} a_{js}b_{sk},\ 1 \le j \le l,\ 1 \le k \le n$.

Example 37 *Vypočítajme* $2\mathbf{A}, \mathbf{A}+\mathbf{B},\ \mathbf{A}.\mathbf{B},\ \mathbf{B}.\mathbf{A}$ *ak existujú pre matice*

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution 38 *1.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^{2\times 4}.$$

$$2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}.\mathbf{B},\ \mathbf{B}.\mathbf{A}\nexists.$$

2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^{2\times 2}, 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}.\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^{3\times3},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^{3\times2},$$

$$2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\0&4&2\\0&0&6\end{pmatrix},\ \mathbf{A}+\mathbf{B}\nexists,\ \mathbf{A}.\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&3\\1&4\\3&0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}.\mathbf{A}\nexists.\square$$

Definition 39 *Nech* $\mathbf{A}=(a_{jk})_{\substack{1\leq j\leq m\\1\leq k\leq n}}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$. *Transponovaná matica k matici* $\mathbf{A}$ *je matica* $\mathbf{A}^T=(a_{kj})_{\substack{1\leq k\leq n\\1\leq j\leq m}}\in\boldsymbol{C}^{n\times m}$.

Definition 40 *3.5 Maticu* $\mathbf{I}_n=(a_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq k\leq n}}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$, $a_{jk}=\begin{cases}1 & j=k\\0 & j\neq k\end{cases}$. *Transponovaná matica k matici* $\mathbf{A}$ *je matica*

$$\mathbf{A}^T=(a_{kj})_{\substack{1\leq k\leq n\\1\leq j\leq m}}\in\boldsymbol{C}^{n\times m}.$$

Remark 41 *Násobenie matíc nie je komutatívne.*

Example 42 *K maticiam* $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *určme transponované matice*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}.$$

Solution 43 $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^{3\times3},\ \mathbf{B}^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}.\square$

Vlastnosti súčtu, násobku a násobenia matíc:

Theorem 44 *Pre každé* $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{D}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$, *a pre každé* $\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{C}$ *platí*

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{D}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{D})$
3. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$
4. $(\alpha\beta)\mathbf{A}=\alpha(\beta\mathbf{A})$

Theorem 45 *Pre každé* $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\boldsymbol{C}^{m\times k}$, $\mathbf{D}\in\boldsymbol{C}^{k\times n}$, $\mathbf{E}\in\boldsymbol{C}^{n\times m}$ *platí*

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{D}=\mathbf{AD}+\mathbf{BD}$,
2. $\mathbf{E}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{EA}+\mathbf{EB}$,
3. *Ak* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times k},\mathbf{B}\in\boldsymbol{C}^{k\times n}$ *tak* $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Example 46 *Ukážme, že pre matice z príkladu 10 platí:* $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Solution 47 $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{AB})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. *Tvrdenie je pravdivé.*$\square$

Definition 48 *Matice, ktoré majú rovnaký počet riadkov ako stĺpcov sa nazývajú štvorcové matice. Pre maticu* $\mathbf{A} = (a_{jk}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ *tvoria prvky* $a_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, n$ *hlavnú diagonálu.*

Remark 49 *Ak* $\mathbf{A} = (a_{jk}) \in \boldsymbol{C}^{m\times n}$, *tak* $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Definition 50 *Pre štvorcovú maticu* $\mathbf{A} = (a_{jk}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ *definujeme inverznú maticu* $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ *ako maticu, pre ktorú platí* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.*K danej matici* $\mathbf{A}$ *existuje najviac jedna inverzná matica, teda* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA}$.

Výpočet inverznej matice

Example 51 *Nájdime inverznú maticu k matici* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 52

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Teda $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Overte, že* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_3 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$. $\square$

Example 53 *Nájdime inverznú maticu k matici* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Solution 54 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$. *Teda* $\mathbf{A}^{-1}\nexists$. $\square$

Theorem 55 *Nech* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$. *Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné*

1. *Existuje* $\mathbf{A}^{-1}$,
2. $\mathbf{A}$ *má hodnosť* n,
3. *riadky matice* $\mathbf{A}$ *sú lineárne nezávislé,*
4. *stĺpce matice* $\mathbf{A}$ *sú lineárne nezávislé.*

Definition 56 *Štvorcová matica, ktorá má inverznú maticu sa nazýva regulárna.*

Cvičenia

1. Určte hodnosť matíc:

(a) $\begin{pmatrix} -2, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & -1 \end{pmatrix}$ [2]

(b) $\begin{pmatrix} 2, & -3, & 1 \\ 4, & -6, & 2 \end{pmatrix}$ [1]

(c) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 1 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \\ 4, & 5, & 1, & 2, & 3 \\ 5, & 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ [5]

(d) $\begin{pmatrix} 81, & 90, & 67, & 107 \\ 21, & 15, & 23, & 11 \\ 39, & 60, & 21, & 85 \\ 99, & 135, & 65, & 181 \\ 120, & 150, & 88, & 192 \end{pmatrix}$ [2]

2. Vzávislosti od parametrov a, $b \in \boldsymbol{R}$ určte hodnosť matíc:

(a) $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 2, & -a \\ 2, & 2, & -a, & 2 \\ 2, & -a, & 2, & 2 \\ -a, & 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{c} 1,\ \text{ak } a = -2; \\ 3,\ \text{ak } a = 6; \\ 4,\ \text{ak } a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-2,\, 6\} \end{array}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} a, & b, & 1, & 0 \\ b, & a, & -1, & 0 \\ a+b, & a+b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a+b \end{pmatrix}$ $\left[\begin{array}{l} 1,\ \text{pre } a = -b \\ 3,\ \text{pre } a \neq -b \end{array}\right]$

3. Zistite, ktoré z matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \\ -1, & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (-1,\ 0,\ 2), \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 0, & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ -2, & 0, & -3 \\ 0, & 3, & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & -2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = (2,\ 0,\ -1,\ 3)$$

sú

(a) diagonálne $[\mathbf{J},\ \mathbf{K} \text{ pre } \alpha = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}]$

(b) dolné trojuholníkové $[\mathbf{J},\ \mathbf{K} \text{ pre } \alpha = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}]$

(c) horné trojuholníkové $[\mathbf{H},\ \mathbf{J},\ \mathbf{K} \text{ pre } \alpha = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}]$

4. Pre matice **A** až **P** z predchádzajúcej úlohy vypočítajte:

(a) $3\mathbf{E} + \mathbf{J}$ $\left[\begin{pmatrix} 4, & 3 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}\right]$

(b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{G}$ [nie je definované]

(c) $\mathbf{D}^T,\ \mathbf{F}^T$ $\left[\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \\ 0, & 0 \\ -1, & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}^T = (1,\ 0,\ 3,\ 4)\right]$

(d) $-2\mathbf{G} - 5\mathbf{H}^T$ $\left[\begin{pmatrix} -7, & -4, & 0 \\ 4, & 0, & 6 \\ -15, & -1, & -10 \end{pmatrix}\right]$

(e) $\mathbf{AD}$ $\left[\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 2, & 2, & 0, & 3 \\ -1, & 4, & 0, & 11 \end{pmatrix}\right]$

(f) $\mathbf{PF}$ $[(11)]$

(g) $\mathbf{FP}$ $\left[\begin{pmatrix} 2, & 0, & -1, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 6, & 0, & -3, & 9 \\ 8, & 0, & -4, & 12 \end{pmatrix}\right]$

(h) $\mathbf{K}^2$ $\left[\begin{pmatrix} \cos 2\alpha, & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha, & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\right]$

(i) $\mathbf{GLD}^T$ $\left[\begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 1, & -15 \\ -5, & 31 \end{pmatrix}\right]$

5. Riešte sústavy lineárnych rovníc v závislosti od parametra $a \in \boldsymbol{R}$:

(a)
$$\begin{aligned} x - 6y + 2z &= -4a - 2 \\ 3x + 3y + 4z &= 3a - 6 \\ 2x - 33y + 6z &= -21a \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} P = \emptyset \text{ pre } a \neq -2 \\ P = \left\{\left(-24 - 15t,\ t,\ 15 + \dfrac{21}{2}t\right);\ t \in \boldsymbol{R}\right\} \text{ pre } a = -2 \end{array}\right]$$

(b)
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} P = \emptyset \text{ ,pre } a = -2 \\ P = \{(1 - t - s,\ t,\ s);\ t \in \boldsymbol{R}\},\ \text{pre } a = 1 \\ P = \left\{\left(\dfrac{1}{a+2},\ \dfrac{1}{a+2},\ \dfrac{1}{a+2}\right)\right\},\ \text{pre } a \neq -2, 1 \end{array}\right]$$

6. Riešte sústavy lineárnych rovníc v závislosti od parametrov $a, b \in \boldsymbol{R}$:

(a)
$$\begin{aligned} 2x &+ ay - 3z = 2 \\ x &+ y - z = 1 \\ -x &+ by + z = 3 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} 1.\ a=-2,\ b=-3 : P=\emptyset \\ 2.\ a\in\boldsymbol{R},\ b=-1 : P=\emptyset \\ 3.\ a\in\boldsymbol{R},\ b\neq -1 : P=\left\{\left(\dfrac{4a+b-11}{b+1}, \dfrac{4}{b+1}, \dfrac{4(a-2)}{b+1}\right)\right\} \end{array}\right]$$

(b)
$$\begin{aligned} ax &+ y + z = 1 \\ 6x &- 3y + bz = 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} 1.\ a=-2, b\neq -3 : P=\left\{\left(t,\ 1-at-\dfrac{5}{b+3},\ \dfrac{5}{b+3}\right);\ t\in\boldsymbol{R}\right\} \\ 2.\ a\neq -2, b\in\boldsymbol{R} : P=\left\{\left(\dfrac{5-(b+3)t}{6+3a}, 1-t-a\dfrac{5-(b+3)t}{6+3a}, t\right);\ t\in\boldsymbol{R}\right\} \end{array}\right]$$

7. Vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} 1, & -5 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ $\quad\left[\begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 0, & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ $\quad\left[\begin{pmatrix} 1, & 2, & 7 \\ 0, & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\right]$

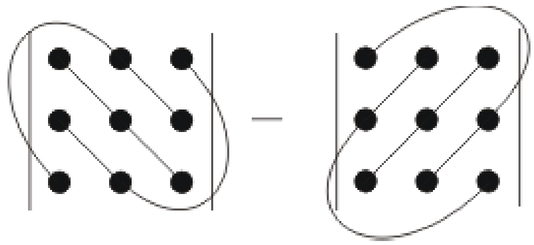
(c) $\begin{pmatrix} 2, & -1, & 3 \\ -2, & 2, & 2 \\ -1, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\left[\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2, & 5, & -8 \\ 2, & 7, & -10 \\ 0, & -1, & 2 \end{pmatrix}\right]$

(d) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 3, & 2 \\ 0, & 0, & 3, & 4 \\ 1, & 0, & 0, & 4 \end{pmatrix}$ $\quad\left[\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 24, & -12, & 12, & -12 \\ -6, & 9, & -9, & 6 \\ 8, & -4, & 8, & -8 \\ -6, & 3, & -3, & 6 \end{pmatrix}\right]$

8. Pomocou inverznej matice riešte maticovú rovnicu:

(a) $\begin{pmatrix} 2, & -3 \\ -4, & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2, & -3, & 1 \\ -1, & 2, & -1 \end{pmatrix}$ $\quad\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 4, & -5, & 1 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 5, & 3, & 4 \\ -6, & -3, & -5 \\ 4, & 2, & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}\begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \\ 0, & -2 \end{pmatrix}$ $\quad\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4, & -6 \\ 3, & 4 \\ 3, & 5 \end{pmatrix}\right]$



Determinant štvorcovej matice.

Determinant štvorcovej matice $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ je číslo určené indukciou:

Definition 57 *Nech* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n},\ n \in \boldsymbol{N}$.

1. *Ak* $n = 1, \mathbf{A} = (a_{11})$, *tak* $\det \mathbf{A} = a_{11}$,
2. *Ak* $n > 1$ *označme* $\mathbf{A}_{ij}$ *maticu, ktorá vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *odstránením jej stĺpca* $\mathbf{A}_{*j}$ *a riadku* $\mathbf{A}_{i*}$.

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathbf{A}_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{1+j} \det \mathbf{A}_{1j},$$

čo nazývame rozvoj determinantu podľa prvého riadku.

V prípade $n = 2$ dostaneme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

V prípade $n = 3$ dostaneme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ a $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det \mathbf{A}_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Determinant matice $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{3\times 3}$ možno vypočítať pomocou Sarusovho pravidla, ktoré je pomôckou pri jeho výpočte:

je to schéma, v ktorej je naznačené. ktoré prvky matice je potrebné vynásobiť a ako tieto súčiny sčítať. Jednou takou
schémou je

v ktorej prvky matice sú znázornené krúžkami. Prvky pospájané čiarami sa vynásobia a od súčtu súčinov prvej skupiny sa odčíta súčet súčinov druhej skupiny. Pre matice $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}, n > 3$ žiadna podobná schéma neexistuje.

Example 58 *Vypočítajme determinanty:* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

Solution 59

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 3.2 = -3, \quad \begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix} = (2+i)\,.\,(5-i) - 10 = 1 + 3i,$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\ .\square$$

Example 60 *Vypočítajme determinant:* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$

Solution 61 *Determinant vypočítam pomocou Sarusovho pravidla:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1.5.0 + 3.3.2 + 3.7.0 - 2.5.0 - 3.3.0 - 1.7.3 = -3.\square$$

Pre výpočet determinantov je výhodné vedieť aj iné postupy:

Theorem 62 *Nech* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, *potom pre každé* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *platí*

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}. \text{ (rozvoj determinantu podľa } i \text{ -teho riadku).}$$

Podobne pre každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *platí*

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}. \text{ (rozvoj determinantu podľa } j \text{ -teho stĺpca).}$$

Theorem 63 *Ak* $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, *vznikne pomocou ERO*

i) násobením niektorého riadku číslom $\alpha \in \mathbf{C}$, *potom* $\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}$,

ii) vzájomnou výmenou dvoch riadkov, potom $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$,

iii) pričítaním násobku niektorého riadku k inému riadku, potom $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$,

iv) $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

Definition 64 *Matica* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbf{N}$ *sa nazýva*

1. dolná trojuholníková ak pre $j > i$ *platí* $a_{ij} = 0$, *t.j. všetky prvky nad hlavnou diagonálou sú nulové,*

2. horná trojuholníková ak pre $j < i$ *platí* $a_{ij} = 0$, *t.j. všetky prvky pod hlavnou diagonálou sú nulové,*

3. trojuholníková ak je dolná, alebo horná trojuholníková,

4. diagonálna, ak pre $i \neq j$ *platí* $a_{ij} = 0$, *t.j. všetky prvky mimo hlavnej diagonály sú nulové.*

Corollary 65 *i) Determinant trojuholníkovej matice sa rovná súčinu prvkov na jej hlavnej diagonále,*

ii) Ak má matica dva rovnaké riadky, alebo stĺpce, jej determinant je rovný nule,

iii) Pre každé $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ *platí* $\det(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

Výpočet inverznej matice pomocou determinantov a Cramerovo pravidlo.

Pre maticu $\mathbf{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ označme $\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$. Túto hodnotu nazývame algebrický doplnok ku prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$. Presnejšie algebrický doplnok pozície (i,j), pretože od prvku a_{ij} ani od prvkov i-teho riadku a j-teho stĺpca matice $\mathbf{A}$ nezávisí. Označme $adj\,\mathbf{A} = (a_{ij})^T_{1\le i,j\le n}$, potom pre $n=2$ dostaneme

$$\mathbf{A}adj\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22} & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{I}_2.$$

Táto rovnosť platí pre každé $n \in \boldsymbol{N}$, teda:

$$\mathbf{A}adj\,\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{I}_n \Rightarrow \mathbf{A}\left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} adj\,\mathbf{A}\right) = \mathbf{I}_n \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} adj\,\mathbf{A}, \text{ ak } \det \mathbf{A} \neq 0.$$

Pre matice typu 2×2 sme ukázali platnosť nasledujúcej vety, ktorú možno dokázať aj pre matice typu $n \times n$.

Theorem 66 *Nech* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ *a nech* $adj\,\mathbf{A} = (\widetilde{a}_{ij})^T$ *je adjungovaná matica k matici* $\mathbf{A}$. *Potom platí* $\mathbf{A}adj\,\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{I}_n$. *Ak naviac* $\det \mathbf{A} \neq 0$, *potom* $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} adj\,\mathbf{A}$.

Tak sme dokázali aj vetu:

Theorem 67 *Matica* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ *je regulárna vtedy a len vtedy, ak* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Example 68 *Použitím adjungovanej matice vypočítajme inverznú maticu k matici* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 69 *Determinant* $\mathbf{A}$:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1 + 3.2.2 + 0.3.2 - 2.1.3 - 3.2.1 - 0.1.2 = 1 \neq 0.$$

$$adj\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} \\ \widetilde{a}_{31} & \widetilde{a}_{32} & \widetilde{a}_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \det \mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \widetilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \det \mathbf{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\widetilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \det \mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \widetilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \det \mathbf{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\widetilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \det \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \widetilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \det \mathbf{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\widetilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \det \mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \widetilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \det \mathbf{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\widetilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \det \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} adj\mathbf{A} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} .\square$$

Cramerovo pravidlo.
Ak $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ je regulárna matica a $\mathbf{b} \in \boldsymbol{C}^{n\times 1}$, tak sústava lineárnych rovníc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

má práve jedno riešenie $\mathbf{x} = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}\right)$, kde $D = \det \mathbf{A}$ a D_j je determinant matice, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ zámenou $j-$ teho stĺpca za stĺpec $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} adj\mathbf{A}\mathbf{b}.$$

Example 70 *Použitím Cramerovho pravidla riešme sústavu lineárnych rovníc*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 + i \\ x_1 + 4x_2 \ + 7x_3 &= 14 - 3i \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 - 2i \end{aligned} \ .$$

Solution 71 *Determinant* $\mathbf{A}$, D_1, D_2, D_3 :

$$\det \mathbf{A} = D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0. \ D_1 = \begin{vmatrix} 2+i & 2 & 1 \\ 14-3i & 4 & 7 \\ 8-2i & 3 & 4 \end{vmatrix} = -10i,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2+i & 1 \\ 1 & 14-3i & 7 \\ 1 & 8-2i & 4 \end{vmatrix} = 10i, \ D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2+i \\ 1 & 4 & 14-3i \\ 1 & 3 & 8-2i \end{vmatrix} = -20,$$

potom $\mathbf{x} = \left(\frac{-10i}{-10}, \frac{10i}{-10}, \frac{-20}{-10}\right) = (i, -i, 2) .\square$

Cvičenia.

1. Vypočítajte:

(a) $\begin{vmatrix} 3, & -2 \\ 4, & -5 \end{vmatrix}$ $[-7]$

(b) $\begin{vmatrix} 2-i, & -i \\ 3+i, & 1-i \end{vmatrix}$ $[0]$

(c) $\begin{vmatrix} 3, & -2, & 3 \\ 4, & -5, & 0 \\ -1, & 0, & 2 \end{vmatrix}$ $[-29]$

2. Vyriešte rovnicu ($x \in \mathbf{C}$)

$$\begin{vmatrix} x, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & -x \\ 3, & x, & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \left[x \in \left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}\right]$$

3. Napíšte rozvoj podľa 2. stĺpca:

(a) $\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{vmatrix}$ $\left[-2\begin{vmatrix} 4, & 6 \\ 7, & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 7, & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 4, & 6 \end{vmatrix}\right]$

(b) $\begin{vmatrix} 2, & -2, & 3, & 1 \\ 4, & -1, & 0, & 5 \\ 3, & 0, & -2, & 1 \\ 3, & 6, & -1, & -2 \end{vmatrix}$ $\left[2\begin{vmatrix} 4, & 0, & 5 \\ 3, & -2, & 1 \\ 3, & -1, & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 3, & -2, & 1 \\ 3, & -1, & -2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 4, & 0, & 5 \\ 3, & -2, & 1 \end{vmatrix}\right]$

4. Vypočítajte:

(a) $\begin{vmatrix} 2, & -2, & 3, & a \\ 4, & -1, & 0, & b \\ 3, & 0, & -2, & c \\ 3, & 6, & -1, & d \end{vmatrix}$ $[-51a + 84b - 75c - 3d]$

(b) $\begin{vmatrix} 5, & 2, & -2, & 3 \\ 4, & 2, & 1, & 1 \\ 3, & 6, & -9, & 6 \\ -4, & -1, & 1, & -2 \end{vmatrix}$ $[-6]$

(c) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 3, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}$ $[-10]$

(d) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 3, & -2, & 7, & 5, & 4 \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 11 \\ 5, & 5, & 1, & -4, & 8 \\ -2, & -1, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}$ $[0]$

(e) $\begin{vmatrix} 5, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3 \\ 2, & 7, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 5, & 3, & 3, & 3 \\ 2, & 2, & 2, & 7, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 3, & 3, & 5, & 3 \\ 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 7 \end{vmatrix}$ $[2^4 3^4 7]$

5. Pomocou determinantov vypočítajte, pre aké hodnoty parametrov $a, b \in \mathbf{C}$ je matica $\mathbf{A}$ regulárna:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a, & -2, & b \\ -2, & b, & -2 \\ 1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$ $[a \neq b, b \neq 2]$

   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & -a \\ 1, & 1, & -a, & 1 \\ 1, & -a, & 1, & 1 \\ -a, & 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $[a \neq -1,\ 3]$

   (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a, & 0, & 0, & 0, & 0, & b \\ 0, & a, & 0, & 0, & b, & 0 \\ 0, & 0, & a, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b, & a, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0, & a, & 0 \\ b, & 0, & 0, & 0, & 0, & a \end{pmatrix}$ $[a \neq \pm b]$

6. Pomocou determinantov vypočítajte inverznú maticu k matici:

   (a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}\right]$

   (b) $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -3 \\ 5, & 1, & -2 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5, & -4, & 7 \\ -11, & 11, & -11 \\ 7, & -10, & 12 \end{pmatrix}\right]$

7. Riešte sústavu lineárnych rovníc (použite Cramerove pravidlo, pokiaľ je to možné):

   (a) $\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= -1 \\ 3x - 5y - z &= 2 \end{aligned}$ $[P = (-59,\ -37,\ 6)]$

   (b) $\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + by + z &= 3 \\ x + 2by + z &= 4 \end{aligned}$; $a, b \in \boldsymbol{R}$

   $$\left[\begin{array}{l} : \left\{P = \frac{1}{b(1-a)}(1-2b, 1-a, 4b-2ab-1), a \neq 1,\ b \neq 0\right\} \\ : \{P = (2-t, 2, t), t \in \boldsymbol{R}, a = 1,\ b = \frac{1}{2}\} \\ : \{P = \emptyset, a \in \boldsymbol{R},\ b = 0\} \\ : \{P = \emptyset, a = 1,\ b \neq 0\} \end{array}\right]$$

Chapter 4 POLYNÓMY.

Polynómy - základné pojmy.

Definition 72 *Nech* $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{C}$. *Funkciu* $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *nazývame komplexný polynóm komplexnej premennej* x *(stručne ho budeme nazývať len polynóm). Čísla* a_0, a_1, $\ldots$, a_n *sú koeficienty polynómu* f *a výrazy* $a_k x^k$ *pre* $k \in \{0, 1. \ldots, n\}$ *sú členy polynómu* f, *špeciálne* a_0 *je absolútny člen. Polynóm* $g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, $g(x) = 0$ *nazývame nulový polynóm a budeme ho označovať* $\mathbf{0}$.

Množinu všetkých komplexných polynómov premennej x budeme označovať $P(\mathbf{C})$ a množinu všetkých polynómov s reálnymi koeficientami $P(\boldsymbol{R})$. Je zrejmé, že $P(\boldsymbol{R}) \subset P(\boldsymbol{C})$.

Súčet $f + g$, rozdiel $f - g$ a súčin fg polynómov f, g definujeme štandardne, tak ako sú tieto binárne operácie definované pre funkcie, teda

$f + g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$f - g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C},\ (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
$fg : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C},\ (fg)(x) = f(x)g(x)$

Example 73 *Určme* $f + g$, $f - g$, fg, *ak* $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

Solution 74 $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x$,

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x - 1) - (x^2 + x + 1) = -x^2 - 2$,
$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1.$ □

Súčet, rozdiel a súčin dvoch polynómov je opäť polynóm.

Rovnosť polynómov definujeme ako rovnosť funkcií. Keďže polynómy majú rovnaké definičné obory, môžeme povedať, že

dva polynómy f, g sú rovnaké a píšeme $f = g$, ak $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \boldsymbol{C}$.

Definition 75 *Stupňom polynómu* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *ktorého aspoň jeden koeficient je nenulový, nazývame číslo* $st(f) = \max\{k \in \{0, 1, \ldots, n\};\ a_k \neq 0\}$.

Definition 76 *Stupňom nulového polynómu nazývame symbol* $-\infty$.

Example 77 *Určme stupeň polynómov* $f(x) = (1 + i)\,x + 1$, $g(x) = -5x^3 + 3x + 2$, $h(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Solution 78 $st(f) = 1$, $st(g) = 3$, $st(h) = n$. □

Theorem 79 *Pre každé dva polynómy* $f, g \in P(\boldsymbol{C})$

$\mathrm{st}(f + g) \leq \max\{\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)\}$
$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g)$

Definition 80 *Komplexné číslo* c *nazývame koreňom polynómu* f, *ak* $f(c) = 0$.

Delenie polynómov.

Theorem 81 *(Základná veta algebry) Každý polynóm aspoň prvého stupňa má koreň v* $\boldsymbol{C}$.

Theorem 82 *(Delenie polynómu polynómom) Ku každým dvom polynómom* $f, g \in P(\boldsymbol{C})$, $g \neq \mathbf{0}$, *existujú také polynómy* $q, r \in P(\boldsymbol{C})$, *že*

1. $f = gq + r$,
2. $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$.

Podmienkami 1 a 2 sú polynómy q, r jednoznačne určené.

Polynóm q z predchádzajúcej vety sa nazýva podiel a polynóm r *zvyšok* po delení polynómu f polynómom g.

Example 83 *Vydeľme polynóm* $(1-2i)x^2 + 3x - 2 + i$ *polynómom* $4ix^3 + (-1+2i)x - 4$.

Solution 84 *Kedže pre tieto polynómy platí*

$(1-2i)x^2 + 3x - 2 + i = [4ix^3 + (-1+2i)x - 4]0 + (1-2i)x^2 + 3x - 2 + i$
a
$\mathrm{st}((1-2i)x^2 + 3x - 2 + i) < \mathrm{st}(4ix^3 + (-1+2i)x - 4)$
tak podielom je nulový polynóm a zvyšok je polynóm $(1-2i)x^2 + 3x - 2 + i$.
$\square$

Algoritmus na výpočet podielu a zvyšku si ukážeme na konkrétnom príklade.

Example 85 *Vydeľme so zvyškom polynóm* $f(x) = 5x^5 - x^4 + 2x^3 + ix - 2i$ *polynómom* $g(x) = x^2 + x + 1$.

Solution 86 *Výpočet podielu q a zvyšku r je takýto: Vydelíme najvyšší člen polynómu f najvyšším členom polynómu g a dostaneme prvý člen podielu q. Vynásobme ho polynómom g a tento súčin odčítajme od polynómu f. Dostaneme polynóm* f_1 *stupňa menšieho ako st(f). Zapísať to môžeme takto:*

$$\begin{array}{lcccc} (5x^5 - x^4 + 2x^3 + ix - 2i) & : & (x^2 + x + 1) & = & 5x^3 \\ -5x^5 - 5x^4 - 5x^3 & & & & \\ \quad -6x^4 - 3x^3 + ix - 2i & & & & \end{array}$$

Predchádzajúci postup zopakujeme, pričom polynóm f nahradíme polynómom f_1. *Získame tak druhý člen podielu q a polynóm* f_2. *Tento postup opakujeme k-krát, kde k je určené podmienkou* $st(f_k) < st(g)$. *Celý výpočet je potom takýto:*

$$\begin{array}{lcccc} (5x^5 - x^4 + 2x^3 + \quad ix - 2i) & : & (x^2 + x + 1) & = & 5x^3 - 6x^2 + 3x + 3 \\ -5x^5 - 5x^4 - 5x^3 & & & & \\ \quad -6x^4 - 3x^3 + \quad ix - 2i & & & & \\ \quad 6x^4 + 6x^3 + 6x^2 & & & & \\ \qquad 3x^3 + 6x^2 + ix - 2i & & & & \\ \quad -3x^3 - 3x^2 - 3x & & & & \\ \qquad 3x^2 + (-3+i)\,x - 2i & & & & \\ \quad -3x^2 - 3x - 3 & & & & \\ \qquad (-6+i)\,x + (-3-2i) & & & & \end{array}$$

Podielom polynómov f, g je polynóm $q(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x + 3$ a zvyškom je polynóm $r(x) = (-6+i)x-3-2i$. Pre tieto polynómy platí $5x^5-x^4+2x^3+ix-2i = (x^2+x+1)(5x^3-6x^2+3x+3) + (-6+i)x - 3 - 2i$. $\square$

Pri výpočte koeficientov podielu q a zvyšku r sa používajú len operácie sčitovania, násobenia a delenia, preto ak f, g sú reálne polynómy, tak aj q, r sú reálne polynómy. Dokonca, ak f, g sú racionálne polynómy (ich koeficienty sú racionálne čísla), tak aj q, r sú racionálne polynómy.

Theorem 87 *Zvyšok po delení polynómu f polynómom $x - c$, kde $c \in \boldsymbol{C}$, je konštantný polynóm $r(x) = f(c)$.*

Všimnime si teraz bližšie delenie polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polynómom $g(x) = x - c$, kde $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $c \in \boldsymbol{C}$. Podielom je polynóm $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ a zvyškom $r(x) = u$. Poďme zistiť, aké sú ich koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, u$. Predovšetkým platí rovnosť polynómov

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + u =$$

$$= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - cb_1)x + u - cb_0.$$

Porovnaním koeficientov dostaneme:

$$\begin{array}{lcl} a_n & = & b_{n-1} \\ a_{n-1} & = & b_{n-2} - cb_{n-1} \\ & \vdots & \\ a_1 & = & b_0 - cb_1 \\ a_0 & = & u - cb_0 \end{array} \qquad \text{odkiaľ} \qquad \begin{array}{lcl} b_{n-1} & = & a_n \\ b_{n-2} & = & a_{n-1} + cb_{n-1} \\ & \vdots & \\ b_0 & = & a_1 + cb_1 \\ u & = & a_0 + cb_0 \end{array}$$

Výsledné vzťahy je vhodné písať v tvare tabuľky

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline c & & cb_{n-1} & \ldots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1} + cb_{n-1}}_{b_{n-2}} & \ldots & \underbrace{a_1 + cb_1}_{b_0} & \boxed{\underbrace{a_0 + cb_0}_{u=f(c)}} \end{array}$$

ktorú nazývame Hornerova schéma.

Theorem 88 *Komplexné číslo c je koreňom polynómu f práve vtedy, keď $(x-c) \mid f$.*

Example 89 *Pomocou Hornerovej schémy vydeľte polynóm $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 8x + 2$ polynómom $x - 2$ a vypočítajte $f(2)$.*

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -2 & 0 & 1 & -8 & 2 \\ \hline 2 & & 2 & 0 & 0 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 & \boxed{-10} \end{array}$$

Podiel je polynóm $x^4 + x - 6$ a zvyšok -10. Takže platí $f(x) = (x-2)(x^4 + x - 6) - 10$, $f(2) = -10$. $\square$

Definition 90 *Polynóm $f \in P(\mathbf{C})\,(P(\mathbf{R}))$ stupňa aspoň 1 sa nazýva ireducibilný, ak sa nedá napísať ako súčin dvoch polynómov aspoň prvého stupňa.*

Theorem 91 *Nech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ a nech $c = a+ib, a, b \in \mathbf{R}$ je koreň polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Potom aj $\overline{c} = a - ib$ je koreň polynómu f .*

Example 92 *Nájdite všetky korene polynómu $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 2$, ak viete, že jedným koreňom je $-1 + i$.*

Solution 93 *f je polynóm s reálnymi koeficientami, preto ďalším jeho koreňom je $\overline{-1+i} = -1 - i$. Vydeľme polynóm f koreňovými činiteľmi $x + 1 - i,\ x + 1 + i$:*

	2	5	8	7	6	2
$-1+i$		$-2+2i$	$-5+i$	$-4+2i$	$-5+i$	-2
	2	$3+2i$	$3+i$	$3+2i$	$1+i$	$\boxed{0}$
$-1-i$		$-2-2i$	$-1-i$	$-2-2i$	$-1-i$	
	2	1	2	1	$\boxed{0}$	

Podielom je polynóm $h(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$. Zvyšné korene polynómu f sú koreňmi polynómu h. Jeho jediný racionálny koreň je číslo $-\frac{1}{2}$. Potom platí $h(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$. Zostávajúce korene polynómu f sú preto koreňmi polynómu $x^2 + 1$. Nájdeme ich riešením kvadratickej rovnice $x^2 + 1 = 0 : x = \pm i$ Polynóm f má korene $-1+i,\ -1-i,\ -\frac{1}{2},\ i, -i$. Sú to všetko jednoduché korene. □

Definition 94 *Nech c je koreň polynómu f. Hovoríme, že c je koreň násobnosti $k \in \mathbf{N}$, ak $f(x) = (x-c)^k q(x)$, pričom $q(c) \neq 0$.*

Example 95 *Zistite, koľkonásobným koreňom polynómu $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ je číslo 2.*

Solution 96 *Pomocou Hornerovej schémy vydelíme polynóm f polynómom $x - c$. Ak vyjde nulový zvyšok, opakujeme delenie pre podiel, ktorý sme predtým dostali. Toto delenie opakujeme dovtedy, kým vyjde nenulový zvyšok. Násobnosť koreňa je potom zrejme počet delení, pri ktorých vyšiel nulový zvyšok.*

	1	-5	7	-2	4	-8
2		2	-6	2	0	8
	1	-3	1	0	4	$\boxed{0}$
2		2	-2	-2	-4	
	1	-1	-1	-2	$\boxed{0}$	
2		2	2	2		
	1	1	1	$\boxed{0}$		
2		2	6			
	1	3	$\boxed{7}$			

Číslo 2 je trojnásobným koreňom polynómu f, ktorý môžeme písať v tvare $f(x) = (x-2)^3(x^2 + x + 1)$. □

Theorem 97 *Každý polynóm* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \in \boldsymbol{N}$, $a_n \neq 0$ *sa dá rozložiť na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad* $\boldsymbol{R}$ $(\boldsymbol{C})$.

Rozklad nad $\boldsymbol{C}$:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_m)^{k_m}, m \in \boldsymbol{N},$$

kde $c_1, \ldots, c_m \in \boldsymbol{C}$ sú korene polynómu a $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Rozklad nad $\boldsymbol{R}$:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \ldots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}, r, s \in \boldsymbol{N} \cup \{0\},$$

kde $c_1, \ldots, c_r \in \boldsymbol{R}$ sú korene polynómu s násobnosťami $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \boldsymbol{N}$ a $p_i, q_i \in \boldsymbol{R}$ také, že $p_i^2 - 4q_i < 0$, pričom $k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_s) = n$.

Theorem 98 *(O racionálnych koreňoch polynómov s celočíselnými koeficientami) Nech racionálne číslo* $\frac{p}{q}$*, kde* p, q *sú nesúdeliteľné celé čísla, je koreň polynómu* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, *s celočíselnými koeficientami. Potom* $q \mid a_n$, $\quad p \mid a_0$.

Example 99 *Nájdime všetky racionálne korene polynómu* $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}$.

Solution 100 *Polynóm* f *nemá celočíselné koeficienty, ale polynóm* $g(x) = 6f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1$ *áno. Navyše pre každé komplexné číslo* x *platí* $f(x) = 0$ *práve vtedy, keď* $g(x) = 0$, *To znamená, že* g *má rovnaké korene ako* f. *Môžeme teda hľadať racionálne korene polynómu* g *v tvare* $\frac{p}{q}$*, kde* p *je celé číslo,* q *je prirodzené číslo vyhovujúce podmienkam:* p *delí* $a_0 = 1$, q *delí* $a_5 = 2$. *Do úvahy pripadajú čísla:*

$p \in \{\pm 1\}$, $q \in \{1, 2\}$, *odkiaľ vyplýva* $\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$.

Ak polynóm g *má racionálny koreň, tak podľa predchádzajúcej vety to môže byť len niektoré z čísel* ± 1, $\pm \frac{1}{2}$ *a žiadne iné. Ktoré z nich je koreňom polynómu* g*, môžeme zistiť Hornerovou schémou. V prípade, že natrafíme na koreň, zistíme hneď jeho násobnosť.*

	2	−3	2	−2	0	1
1		2	−1	1	−1	−1
	2	−1	1	−1	−1	$\boxed{0}$
1		2	1	2	1	
	2	1	2	1	$\boxed{0}$	
1		2	3	5		
	2	3	5	$\boxed{6}$		

Zistili sme, že polynóm g *je deliteľný polynómom* $(x - 1)^2$*, ale nie je deliteľný polynómom* $(x - 1)^3$*, čo znamená, že* 1 *je dvojnásobný koreň polynómu* g *a tento polynóm môžeme napísať v tvare*

$$g(x) = (x - 1)^2 (2x^3 + x^2 + 2x + 1).$$

Tretie delenie polynómu g *polynómom* $x - 1$ *v Hornerovej schéme už nebolo nutné vykonať. Stačilo si uvedomiť, že reálny polynóm* $h(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, *ktorý* *je nenulový s nezápornými koeficientami, nemôže mať kladné korene, lebo hodnota tohto polynómu v kladnom čísle je kladné číslo, a teda nie nula. Všetky ďalšie korene polynómu g už musia byť koreňmi polynómu h. Preto stačí pokračovať v Hornerovej schéme pre polynóm h, pričom, kladné čísla už nemusíme overovať.*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline -1 & & -2 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

Čislo -1 nie je koreňom polynómu g.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Polynóm $2x^2+2$ už nemá reálne korene (teda ani racionálne), a preto číslo $-\frac{1}{2}$ je len jednoduchým koreňom polynómu g. Polynóm g, a teda aj f má práve tieto racionálne korene: 1 - dvojnásobný, $-\frac{1}{2}$ - jednoduchý a polynóm f môžeme písať v tvare súčinu $f(x)=\frac{1}{6}g(x)=\frac{2}{6}(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+1)$. □

Nech $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$, $n\geq 1$. Podľa základnej vety algebry má tento polynóm aspoň jeden koreň. Označme ho c_1. Polynóm f je deliteľný koreňovým činiteľom $x-c_1$, teda existuje polynóm $f_1:\mathrm{st}(f_1)=n-1$ tak, že $f(x)=(x-c_1)f_1(x)$.Ak $n-1\geq 1$, tak f_1 má koreň, môžeme ho označiť c_2 a existuje taký polynóm $f_2:\mathrm{st}(f_2)=n-2$, že $f_1(x)=(x-c_2)f_2(x)$ a potom $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)f_2(x)$.Takto môžeme pokračovať ďalej a po n-tom zopakovaní tohto kroku dostaneme $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)f_0(x), \mathrm{st}(f_0)=0$, f_0 je konštantný polynóm, preto pre všetky komplexné čísla x je $f_0(x)=b$, kde b je komplexné číslo. Vzhľadom k tomu, že najvyšší koeficient polynómu f je a_n, musí platiť: $b=a_n$.Tak sme dospeli k tvaru polynómu f

$$f(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)$$

ktorý nazývame rozklad polynómu f na súčin koreňových činiteľov. Z tohto tvaru polynómu f vyplýva, že čísla $c_1,c_2,\dots,c_n$ sú jeho korene a okrem nich žiadne iné nemá. Preto platí

Theorem 101 *Polynóm stupňa n, $n\geq 1$, z $P(\boldsymbol{C})$ má najviac n rôznych koreňov.*

Racionálne funkcie.

Definition 102 *Nech $f,\ g\in P(\boldsymbol{C})\,(P(\boldsymbol{R}))$ sú polynómy, $g\neq \mathbf{0}$, potom komplexnú funkciu $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ nazývame racionálna funkcia. Ak $st(f)<st(g)$, funkcia F sa nazýva rýdzoracionálna.*

Example 103 *Funkcie $F(x)=\frac{2x^3-ix+1}{x^2+(2-i)x+2}$, $G(x)=\frac{x^2+4x+1}{3x^5-x^3+x^2+2}$ sú racionálne, funkcia G je rýdzoracionálna.* □

Definition 104 *a) Elementárnym zlomkom nad $\boldsymbol{C}$ (presnejšie: komplexným elementárnym zlomkom) nazývame každú racionálnu funkciu $F(x)=\frac{a}{(x-\alpha)^k}$, kde $a,\alpha\in\boldsymbol{C}$, $k\in\boldsymbol{N}$.*

b) Elementárnym zlomkom nad $\boldsymbol{R}$ *(presnejšie: reálnym elementárnym zlomkom) nazývame každú racionálnu funkciu* $F(x) = \frac{a}{(x-\alpha)^k}$, kde $a, \alpha \in \boldsymbol{R}$, $k \in \boldsymbol{N}$ *a* $G(x) = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, *kde* $a, b, p, q \in \boldsymbol{R}$, $k \in \boldsymbol{N}$, *polynóm* x^2+px+q *nemá reálne korene.*

Theorem 105 *Každá komplexná (resp. reálna) racionálna funkcia sa dá vyjadriť v tvare súčtu komplexného (resp. reálneho) polynómu a konečného počtu elementárnych zlomkov nad* $\boldsymbol{C}$ *(resp.* $\boldsymbol{R}$*).*

Tomuto tvaru racionálnej funkcie hovoríme rozklad racionálnej funkcie na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{R}$).

Postup pri rozklade racionálnej funkcie $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{R}$).

1. Vykonáme delenie polynómov f, g so zvyškom: $f(x) = g(x)q(x)+r(x)$, $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$, odkiaľ
$$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$
Tým sme získali vyjadrenie racionálnej funkcie H v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

2. Nájdeme kanonický rozklad polynómu g nad $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{R}$).

3. Rýdzoracionálnu funkciu $\frac{r(x)}{g(x)}$ rozpíšeme na súčet elementárnych zlomkov tak, že ku každému činiteľu z kanonického rozkladu polynómu g (okrem najvyššieho koeficienta) pridávame zlomky:
$$(x-\alpha)^k \quad \to \quad \tfrac{a_1}{x-\alpha} + \tfrac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \tfrac{a_k}{(x-\alpha)^k}$$
$$(x^2+px+q)^k \quad \to \quad \tfrac{b_1x+c_1}{x^2+px+q} + \tfrac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \tfrac{b_kx+c_k}{(x^2+px+q)^k}$$

4. Vypočítame koeficienty a_j, b_j, c_j.

Example 106 *Rozložte na elementárne zlomky nad* $\mathbf{C}$ *racionálnu funkciu* $G(x) = \frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)}$.

Solution 107 *Funkcia* G *je rýdzoracionálna, preto nie je potrebné vykonať delenie. Kanonický rozklad menovateľa je* $2(x+1)^2(x-i)(x+i)$. *Funkciu* G *môžeme preto vyjadriť v tvare* $\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x-i)(x+i)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{x+i}$ *kde* $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. *Koeficienty* a, b, c, d *vypočítame tak, že predchádzajúcu rovnosť vynásobíme menovateľom racionálnej funkcie* G, *čím dostaneme rovnosť polynómov* $x^3+2x^2-x = 2a(x+1)(x-i)(x+i) + 2b(x-i)(x+i) + 2c(x+1)^2(x+i) + 2d(x+1)^2(x-i)$. *Úpravou polynómu na pravej strane rovnovnosti na normálny tvar dostaneme*

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x = {} & (2a+2c+2d)x^3 + (2a+2b+4c+2ci+4d-2di)x^2 + \\ & + (2a+2c+4ci+2d-4di)x + 2a+2b+2ci-2di \end{aligned}$$

Táto rovnosť je splnená práve vtedy keď

$$\begin{aligned} 1 &= 2a+2c+2d \\ 2 &= 2a+2b+4c+2ci+4d-2di \\ -1 &= 2a+2c+4ci+2d-4di \\ 0 &= 2a+2b+2ci-2di \end{aligned}$$

Vyriešením tejto sústavy rovníc dostaneme $a=0,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1+i}{4},\ d=\frac{1-i}{4}$ *a môžeme napísať rozklad funkcie* G *na elementárne zlomky nad* $\boldsymbol{C}$: $\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1+i}{4(x-i)}+\frac{1-i}{4(x+i)}$. *Uvedieme si druhý spôsob výpočtu koeficientov* $a,\ b,\ c,\ d$. *Stačí si uvedomiť, že rovnosť*

$$x^3+2x^2-x = 2a(x+1)(x-i)(x+i)+2b(x-i)(x+i)+2c(x+1)^2(x+i)+2d(x+1)^2(x-i)$$

je pravdivá pre každé $x \in \boldsymbol{C}$. *Dosadením konkrétnych hodnôt za* x *do tejto rovnosti dostaneme sústavu rovníc, z ktorej vypočítame hľadané koeficienty. Výhodné je dosadzovať korene menovateľa racionálnej funkcie* G, *v našom prípade čísla* $-1,\ i,\ -i$:

$$\begin{aligned} x=-1: &\quad -1+2+1 = 2b(-1-i)(-1+i) \\ x=i: &\quad -i-2-i = 2c(1+i)^2 2i \\ x=-i: &\quad i-2+i = 2d(1-i)^2(-2i) \end{aligned}$$

Odtiaľto ľahko vypočítame $b,\ c,\ d$. *Na výpočet koeficienta* a *použijeme niektorú z predchádzajúcich rovníc, ktoré sme získali porovnaním koeficientov rovnakých polynómov alebo dosadíme do týchto polynómov za* x *hocijaké číslo, napr.*

$$x=0: \quad 0 = 2a(-i)i+2b(-i)i+2ci+2d(-i)$$

a odtiaľ vypočítame a.$\square$

Example 108 *Rozložte na elementárne zlomky nad* $\boldsymbol{R}$ *racionálnu funkciu* $G(x) = \frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)}$.

Solution 109 *V tomto prípade máme hotový už aj kononický rozklad menovateľa nad* $\boldsymbol{R}$ *a môžeme písať rozklad racionálnej funkcie:* $\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$. *Po vynásobení menovateľom racionálnej funkcie dostaneme* $x^3+2x^2-x = 2a(x+1)(x^2+1)+2b(x^2+1)+2(cx+d)(x+1)^2$. *Dosaďme sem reálne korene menovateľa racionálnej funkcie (môžu sa aj imaginárne, ale nie je to moc výhodné, lebo dostaneme rovnice s komplexnými koeficientami).*

$$x=-1: \quad -1+2+1 = 2b(1+1)$$

odkiaľ $b=\frac{1}{2}$. *Ďalšie rovnice získame porovnaním koeficientov polynómov, napr. stačí porovnať koeficienty pri* $x^3,\ x,\ x^0$.

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 1 = 2a+2c \\ x: &\quad -1 = 2a+2c+4d \\ x^0: &\quad 0 = 2a+2b+2d \end{aligned}$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme $a=0,\ c=\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{2}$. *Potom kanonický rozklad funkcie* G *nad* $\boldsymbol{R}$ *je* $\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}$.$\square$

Cvičenia

1. Vynásobte polynómy:

   (a) $2x^4 - 6x^3 + 5x - 1)(x^2 - 2x + 2)$
   $[2x^6 - 10x^5 + 16x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 12x - 2\ ]$

   (b) $(3x^3 + (1-i)x^2 + ix - 2 + i)(3x^3 + (1+i)x^2 - ix - 2 - i)$
   $[9x^6 + 6x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 5x^2 + 2x + 5]$

2. Vydeľte so zvyškom:

   (a) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$
   $[\text{podiel}:\ 2x^2 + 3x + 11,\ \text{zvyšok}:\ 25x - 5]$

   (b) $2ix^6 + (2-2i)x^5 - ix^4 + x^3 - x^2) : (ix^3 + (1-i)x^2 + 1)$
   $[\text{podiel}:\ 2x^3 - x - 1, \text{zvyšok}:\ -ix^2 + x + 1]$

   (c) $(x^3 - x^2 - x) : (x - 1 + 2i)$
   $[\text{podiel}:\ x^2 - 2ix - 5 - 2i,\ \text{zvyšok}:\ -9 + 8i]$

3. Pomocou Hornerovej schémy vykonajte delenie so zvyškom:

   (a) $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8) : (x - 1)\ \ [(x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5]$

   (b) $(4x^3 + x^2) : (x + 1 + i)\ \ [(x + 1 + i)(4x^2 - (3 + 4i)x - 1 + 7i) + 8 - 6i]$

   (c) $(3x^4 + (1-3i)x^3 - 2ix^2 + ix - i) : (x - i)\ \ [(x - i)(3x^3 + x^2 - ix + 1 + i) - 1]$

4. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte $f(c)$:

   (a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,\ c = 4\ \ [136\ ]$

   (b) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2,\ c = -\dfrac{1}{3}\ [1\ ]$

   (c) $x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7,\ c = -2 - i\ \ [-1 - 44i\ ]$

5. Aké podmienky musia spĺňať komplexné čísla p, q, m, aby polynóm x^4+px^2+q bol deliteľný polynómom x^2+mx+1? $[m = 0,\ q - p + 1 = 0$ alebo $q = 1,\ p = 2 - m^2\ ]$

6. Určte číslo a tak, aby číslo c bolo koreňom polynómu f:

   (a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2,\ c = 3\ \ \left[\frac{47}{3}\ \right]$

   (b) $f(x) = 2x^5 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a,\ c = -1\ \ \left[\frac{1}{3}\ \right]$

7. Zistite koľkonásobným koreňom polynómu f je číslo c:

   (a) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8,\ c = 2$ [dvojnásobný]

   (b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2$ [trojnásobný]

   (c) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ c = -2$ [štvornásobný]

   (d) $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1.\ c = i$ [trojnásobný]

8. Nájdite racionálne korene polynómov:

   (a) $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3$, $\left[1 - \text{dvojnásobný},\ -\frac{3}{2}\right]$
   (b) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$, $\left[-\frac{2}{3}, 2\ \right]$
   (c) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$ [nemá racionálne korene]
   (d) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$ $\left[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$
   (e) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ $[-1 - \text{štvornásobný}]$

9. Riešte rovnicu, ak poznáte jeden jej koreň:

   (a) $x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0,\ 1 - i$ $\left[1 \pm i,\ -1 \pm \sqrt{3}\right]$
   (b) $4x^6 - 16x^5 + 35x^4 - 60x^3 + 71x^2 + 16x - 20 = 0,\ 2 + i$ $\left[2 \pm i,\ \pm 2i,\ \pm\frac{1}{2}\right]$
   (c) $x^6 - x^5 - 13x^3 + 9x^2 + 8x + 20 = 0,\ -1 + 2i$ $\left[-1 \pm 2i,\ 2\ - \text{dvojnásobný},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right]$
   (d) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1,\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[1,\ \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})\ -\ \text{dvojnásobný}\ \right]$

10. Nech a, b, c sú navzájom rôzne komplexné čísla. Dokážte, že polynómy f, g sú rovnaké.

   (a) $f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},\ g(x) = x^2$
   [Stačí dokázať, že $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(c) = g(c)$]
   (b) $f(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},\ g(x) = 1$
   [Stačí dokázať, že $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(c) = g(c)$]

11. Nájdite kanonický roklad polynómov nad $\boldsymbol{C}$:

   (a) $ix^3 + 1$
   $\left[i(x+i)\left(x - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(x - \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\right]$
   (b) $x^4 - 1$
   $[(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)\ ]$
   (c) $3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 3x - 3$
   $\left[3(x+1)^2\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})\right]$
   (d) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$
   $\left[6(x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)\right]$

12. Nájdite kanonický roklad polynómov nad $\boldsymbol{R}$:

   (a) $x^4 + 4$
   $[(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)\ ]$
   (b) $x^6 - 8$
   $\left[(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - \sqrt{2}x + 2)\ \right]$

(c) $3x^4 - 18x^2 + 9$
$\left[3\left(x - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}-\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\right]$

(d) $4x^4 + x^2 + 1$
$\left[4\left(x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right]$

(e) $2x^6 + 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 1$
$\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^3(x^2 - x + 1)\right]$

(f) $x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^2 - 8x + 4$
$[(x-1)^2(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)\ ]$

13. Rozložte na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{C}$ (bez výpočtu koeficientov) racionálnu funkciu:

(a) $\frac{1}{(x^3-8)^2(x^4+4x^2+16)}$
$\left[\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x+1+i\sqrt{3})^3} + \frac{d}{(x+1+i\sqrt{3})^2} + \frac{e}{x+1+i\sqrt{3}} + \right.$
$\left. + \frac{p}{(x+1-i\sqrt{3})^3} + \frac{q}{(x+1-i\sqrt{3})^2} + \frac{r}{x+1-i\sqrt{3}} + \frac{s}{x-1+i\sqrt{3}} + \frac{t}{x-1-i\sqrt{3}}\right]$

(b) $\frac{3x^2+1}{(2x^3+4x^2)(x^2-4)}$
$\left[\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{(x+2)^2} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{x-2}\right]$

(c) $\frac{x+1}{(x^4-16)(x^3+8)}$
$\left[\frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-2i} + \frac{e}{x+2i} + \frac{r}{x-1-i\sqrt{3}} + \frac{s}{x-1+i\sqrt{3}}\right]$

14. Rozložte na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{R}$ (bez výpočtu koeficientov) racionálnu funkciu:

(a) $\frac{1}{(x^3-8)^2(x^4+4x^2+16)}$
$\left[\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2} + \frac{cx+d}{(x^2+2x+4)^3} + \frac{ex+p}{(x^2+2x+4)^2} + \frac{qx+r}{x^2+2x+4} + \frac{sx+t}{x^2-2x+4}\right]$

(b) $\frac{3x^2+1}{(2x^3+4x^2)(x^2-4)}$
$\left[\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{(x+2)^2} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{x-2}\right]$

(c) $\frac{x+1}{(x^4-16)(x^3+8)}$
$\left[\frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2} + \frac{dx+e}{x^2+4} + \frac{rx+s}{x^2-2x+4}\right]$

15. Rozložte na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{C}$ racionálnu funkciu:

(a) $\frac{4}{x^4-1}$ $\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{i}{x-i} + \frac{i}{x+i}\right]$

(b) $\frac{x^3+3x^2+(3+i)x+2}{(x+1)^3(x-i)}$ $\left[\frac{i}{(x+1)^3} + \frac{1}{x-i}\right]$

(c) $\frac{4x^2-12x+4}{(x^2-2x+2)^2}$ $\left[\frac{2-i}{(x-1+i)^2} + \frac{2+i}{(x-1-i)^2}\right]$

(d) $\frac{4x-i}{2x^3+2i}$ $\left[\frac{-i}{2(x-i)} + \frac{\sqrt{3}+i}{2x-\sqrt{3}+i} + \frac{-\sqrt{3}+i}{2x+\sqrt{3}+i}\right]$

16. Rozložte na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{R}$ racionálnu funkciu:

(a) $\frac{6x^2+7x+4}{2x^3+3x^2-1}$

$\left[\frac{4}{2x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\right]$

(b) $\frac{x^6-5x^5+13x^4-18x^3+12x^2-8x+12}{(x-2)(x^2-2x+2)^2}$

$\left[x + 1 + \frac{3}{x-2} + \frac{x-6}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{2}{x^2-2x+2}\right]$

(c) $\frac{4x^5-8x^4+5x^3-x^2+x+1}{(2x^2-x)^2}$

$\left[x - 1 + \frac{6}{(2x-1)^2} - \frac{10}{2x-1} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}\right]$

(d) $\frac{x^6+x^5}{(x^3-1)(x^2+x+1)}$

$\left[x + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)^2} + \frac{-11x+5}{9(x^2+x+1)} + \frac{2}{9(x-1)}\right]$

(e) $\frac{-x^4-3x^3+10x^2-4x+1}{(x-1)(x^4-x^3-x+1)}$

$\left[\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x^2+x+1}\right]$

Part II

Matematická analýza

V matematike sa často uvažuje o vzájomných vzťahoch číselných množín. Napríklad závislosť medzi polomerom kruhu a jeho plošným obsahom, okamžitou rýchlosťou telesa padajúceho k zemi z kľudovej polohy vo vákuu a dobou pádu, hmotnosťou tovaru a jeho cenou. Tieto vzťahy sa volajú funkcie. Cieľom tejto časti je hlbšie oboznámiť študentov s definíciou a vlastnosťami funkcií.

Chapter 5 REÁLNE FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ.

Pojem funkcie.

Definition 110 *Nech A, B sú dve neprázdne množiny a f je pravidlo, ktoré každému prvku $x \in A$ priradí jediný prvok $y \in B$. Hovoríme, že f je funkcia (zobrazenie), ktorá zobrazuje množinu A do množiny B. Píšeme $f : A \to B$ (f zobrazuje A do B), alebo $x \overset{f}{\longmapsto} y$.*

Funkciu označujeme písmenami f, g, h, ... Množinu A nazývame definičným oborom funkcie f a označujeme $D(f)$ $(A = D(f))$. Ak $x \in A$, prvok $f(x) \in B$ nazývame hodnotou funkcie f v bode x. Množinu

$$f(A) = \{f(x) \in B : x \in A\} \subset B$$

nazývame obor hodnôt funkcie f a označujeme $H(f)$. Množinu B nazývame koobor funkcie f. Prvky $x \in A$ sa nazývajú nezávisle premenné a k nim priradené prvky $y \in B$ závisle premenné.

Pre zápis funkcie používame označenie: $f : A \to B,\ f(x) = V(x)$, kde A je definičný obor funkcie, B je koobor funkcie a $f(x) = V(x)$ je algebrický výraz - predpis funkcie.

Definition 111 *Nech $f : A \to B$ a $g : C \to D$. Hovoríme, že funkcie f a g sa rovnajú, píšeme $f = g$ práve vtedy, ak $A = C$ a $\forall x \in A$ platí $f(x) = g(x)$.*

Remark 112 *Z predchádzajúcej definície plynie, že $f(A) = g(C) = H(f) = H(g) \subset B \cap D$.*

Definition 113 *Nech $C \subset A$, $f : A \to B$, $g : C \to B$ a $\forall x \in C$ je $f(x) = g(x)$. Potom funkciu $f : A \to B$ nazývame rozšírením funkcie $g : C \to B$ a funkciu $g : C \to B$ zúžením funkcie $f : A \to B$. Píšeme $g = f|_C$.*

Ak f je taká funkcia, ktorej koobor je množina reálnych čísel $B \subset \boldsymbol{R}$, f nazývame reálnou funkciou. Ak pre funkciu f je $A, B \subset \boldsymbol{R}$, hovoríme o reálnej funkcii reálnej premennej a f označujeme $f : A \to \boldsymbol{R}$.

Niekedy je funkcia f určená iba predpisom (vzorcom), napríklad $f(x) = x^3$, ale nie je priamo daná množina $A = D(f)$. Vtedy pod $D(f)$ rozumieme množinu všetkých $x \in \boldsymbol{R}$, pre ktoré má vzorec zmysel. Tento definičný obor sa nazýva prirodzený definičný obor.

Example 114 *Dané sú predpisy funkcií $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$, $h(x) = \frac{9}{5}x + 32$. Nájdite ich definičný obor, koobor, obor hodnôt a zapíšte ich!*

Solution 115 *Pre funkciu $f(x) = x^2 - 1$, máme $D(f) = \boldsymbol{R}$. Pretože $\forall x \in \boldsymbol{R}$ platí $x^2 \geq 0$, potom $x^2 - 1 \geq -1$. Teda $H(f) = \langle -1, \infty)$. Funkciu f zapíšeme: $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2 - 1$.*

Pre funkciu $g(x)=\frac{1}{x-3}$, *máme* $D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$, *pretože* $\forall x\in\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$ *platí* $x-3\neq 0\Rightarrow\frac{1}{x-3}\neq 0$. *Teda* $H(g)=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$. *Funkciu* g *zapíšeme:* $g:\boldsymbol{R}\setminus\{3\}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\frac{1}{x-3}$.

Pre funkciu $h(x)=\frac{9}{5}x+32$, *máme* $D(h)=\boldsymbol{R}$, $H(h)=\boldsymbol{R}$. *Funkciu* h *zapíšeme:* $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $h(x)=\frac{9}{5}x+32$.□

Remark 116 *Určiť obor hodnôt funkcie* f *nemusí byť jednoduché. Určenie oboru hodnôt ľubovoľnej reálnej funkcie reálnej premennej je súčasťou kapitoly aplikácie diferenciálneho počtu.*

Example 117 *Zistime, či sa funkcie* $f(x)=x^2-1$ *a* $g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$ *rovnajú.*

Solution 118 *Určíme prirodzený definičný obor oboch funkcií* $D(f)=\boldsymbol{R}$, $D(g)=\boldsymbol{R}$, *teda* $D(f)=D(g)=\boldsymbol{R}$. *Pre každé* $x\in\boldsymbol{R}$ *platí:* $g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x^2-1=f(x)$. *Teda* $f=g$. □

Example 119 *Dané sú funkcie* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x$, $g:\langle 0,\infty)\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$ *a* $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $h(x)=|x|$. *Zistite, či sú niektoré rozšírením alebo zúžením ostatných.*

Solution 120 *Funkcia* $g:\langle 0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ *je zúžením funkcie* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ *aj* $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, *čo zapíšeme* $g=f|_{\langle 0,\infty)}$, $g=h|_{\langle 0,\infty)}$. *Funkcie* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ *a* $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ *sú zas rôznymi rozšíreniami funkcie* $g:\langle 0,\infty)\to\boldsymbol{R}$. □

Example 121 *Určme definičný obor funkcií: a)* $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$, *b)* $g(x)=\sqrt{16-x^2}$.

Solution 122 *a) Formula - zlomok má zmysel iba vtedy, ak jeho menovateľ je rôzny od nuly* $x^2-9\neq 0$, *odkiaľ* $x\neq -3\vee x\neq 3$. *Potom* $D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{-3,3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$. *Tak* $f:\boldsymbol{R}\setminus\{-3,3\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$.

b) Definičným oborom budú všetky reálne čísla, pre ktoré platí $16-x^2\geq 0$, *odkiaľ* $x\in\langle -4,4\rangle$. *Potom* $D(g)=\langle -4,4\rangle$ *a* $g:\langle -4,4\rangle\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\sqrt{16-x^2}$. □

Operácie s funkciami.

V matematickej analýze sa často zaoberáme rôznymi kombináciami funkcií. Je potrebné ovládať tieto vzťahy.

Definition 123 *Dané sú funkcie* $f:A\to\boldsymbol{R}$, $A\subset\boldsymbol{R}$, $g:B\to\boldsymbol{R}$, $B\subset\boldsymbol{R}$ *a* $c\in\boldsymbol{R}$ *ľubovoľné reálne číslo. Definujeme funkcie:*

$|f|(x)=|f(x)|$, *s definičným oborom* $D(|f|)=D(f)=A$ *nazývame absolútnou hodnotou funkcie* f,

$(cf)(x)=cf(x)$, *s definičným oborom* $D(cf)=D(f)=A$ *nazývame súčinom čísla* c *a funkcie* f,

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, *s definičným oborom* $D(f+g)=A\cap B$ *nazývame súčtom funkcií* f *a* g,

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, *s definičným oborom* $D(f-g)=A\cap B$ *nazývame rozdielom funkcií* f *a* g,

$(fg)(x)=f(x)g(x)$, *s definičným oborom* $D(fg)=A\cap B$ *nazývame súčinom funkcií* f *a* g,

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, *s definičným oborom* $D\left(\frac{f}{g}\right)=A\cap B\setminus B^\circ$ *nazývame podielom funkcií* f *a* g, *pričom* $B^\circ=\{x\in B:g(x)=0\}$.

Definition 124 *Dané sú funkcie* $f : B \to \boldsymbol{R}$, $B \subset \boldsymbol{R}$, $g : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ *také, že* $\emptyset \neq H(g) \cap B$. *Zloženou funkciou* $f \circ g$ *z funkcií* g *a* f *v tomto poradí rozumieme funkciu*

$$f \circ g : C \to \boldsymbol{R},\ \ (f \circ g)(x) = f(g(x)),\ C = \{x \in A : g(x) \in B\}.$$

Funkciu g *nazývame vnútorná zložka funkcie* $f \circ g$ *a funkciu* f *vonkajšia zložka funkcie* $f \circ g$.

Example 125 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = x$ *a* $g : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty),\ g(x) = \sqrt{x}$. *Nájdite* $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ *a ich definičné obory.*

Solution 126 $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = \langle 0, \infty) \Longrightarrow D(f+g) = D(f) \cap D(g) = \boldsymbol{R} \cap \langle 0, \infty) = \langle 0, \infty)$, *tak* $f + g : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, $(f+g)(x) = x + \sqrt{x}$, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = \langle 0, \infty) \Longrightarrow D(f-g) = D(f) \cap D(g) = \boldsymbol{R} \cap \langle 0, \infty) = \langle 0, \infty)$, *tak* $f - g : \langle 0, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $(f-g)(x) = x - \sqrt{x}$, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = \langle 0, \infty) \Longrightarrow D(fg) = D(f) \cap D(g) = \boldsymbol{R} \cap \langle 0, \infty) = \langle 0, \infty)$, *tak* $fg : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, $(fg)(x) = x\sqrt{x}$, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = \langle 0, \infty)$, $D^{\circ}(g) = \{0\} \Longrightarrow D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus D^{\circ}(g) =$
$= \boldsymbol{R} \cap \langle 0, \infty) \setminus \{0\} = (0, \infty)$, *tak* $\frac{f}{g} : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$. $\square$

Remark 127 *Funkcia* $\frac{f}{g}$ *z predchádzajúceho príkladu je rôzna od funkcie* $h(x) = \sqrt{x}$, *pretože* $\frac{f}{g} : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$, $h : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, $h(x) = \sqrt{x}$,*teda* $D\left(\frac{f}{g}\right) = (0, \infty) \neq \langle 0, \infty) = D(h) \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}} \neq \sqrt{x}$.

Example 128 *Nech* $f : \langle 4, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sqrt{x-4}$ *a* $g : \boldsymbol{R}\setminus\{0\} \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. *Nájdite predpis a definičný obor pre funkcie* $g \circ f$ *a* $f \circ g$.

Solution 129 *Podľa definície* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-4}\right) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$, *pričom* $D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$, *t.j.* $x \in \langle 4, \infty) : f(x) = \sqrt{x-4} \neq 0 \Rightarrow 4 < x \Rightarrow D(g \circ f) = (4, \infty)$. *Podobne* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x} - 4}$, *kde* $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f) = \langle 4, \infty)\}$,*t.j.* $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\} : g(x) = \frac{1}{x} \in \langle 4, \infty) \Rightarrow 4 \leq \frac{1}{x} < \infty \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow D(f \circ g) = \left(0, \frac{1}{4}\right\rangle$.$\square$

Remark 130 *Skladanie funkcií nie je komutatívne, t.j.* $g \circ f \neq f \circ g$.

Graf funkcie.

Niekedy je vhodnejšie a inštruktívnejšie miesto popisu funkcie pomocou formuly, alebo tabuľky načrtnúť obrázok funkcie. To je aj úlohou matematickej analýzy, aby sme vedeli načrtnúť obrázok danej funkcie. Obrazová reprezentácia funkcie sa nazýva graf funkcie.

Definition 131 *Nech* $f : A \to B$, $(A,\ B \subset \boldsymbol{R})$ *je funkcia. Množina* $G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B\ ;\ x \in A\}$,*kde* $A \times B$ *je kartézsky súčin množín* A *a* B, *sa nazýva graf funkcie* f .

Vlastnosti funkcií.

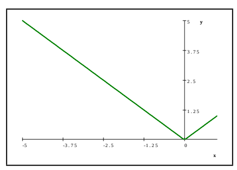
Ohraničené funkcie.

Definition 132 *Funkciu $f : A \to \boldsymbol{R}$ nazývame zdola (zhora) ohraničenou na množine $S \subset A$, ak je zdola (zhora) ohraničená množina $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$, t.j. $\exists m$ $(M) : \forall x \in S$ platí $f(x) \geq m$ $(f(x) \leq M)$. Ak je funkcia f ohraničená zdola aj zhora na množine S, hovoríme že je ohraničená na množine S. Ak niektorá z uvedených vlastností platí na množine $S = A$, hovoríme, že f je ohraničená (zdola, zhora).*

Definition 133 *Pre funkciu f, ktorá je zdola (zhora) ohraničená na množine S, definujeme infimum (supremum) množiny $f(S)$, ktoré označíme $\inf_{x \in S} f(x)$ $(\sup_{x \in S} f(x))$. Ak $\inf_{x \in S} f(x) = m$ $(\sup_{x \in S} f(x) = M)$ a platí $m \in f(S)$ $(M \in f(S))$, tak toto číslo nazývame minimom (maximom) funkcie f na množine S a zapisujeme $\min_{x \in S} f(x)$ $(\max_{x \in S} f(x))$.*

Example 134 *Nech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = |x|$. Nájdite infimum, minimum, supremum a maximum funkcie (ak existujú) f na intervale $I = \langle -\pi, 1 \rangle$.*

Solution 135 *Z náčrtu grafu funkcie $f(x) = |x|$*



vidíme, že

$$f(0) = |0| = 0 = \inf_{x \in \langle -\pi, 1 \rangle} f(x) = \min_{x \in \langle -\pi, 1 \rangle} f(x)$$

a podobne

$$f(-\pi) = |-\pi| = \pi = \sup_{x \in \langle -\pi, 1 \rangle} f(x) = \max_{x \in \langle -\pi, 1 \rangle} f(x) . \square$$

Monotónne funkcie.

Definition 136 *Funkciu $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ nazývame rastúcou (klesajúcou) na množine $S \subset A$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Funkciu $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ nazývame neklesajúcou (nerastúcou) na množine $S \subset A$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.*

Ak niektorá z uvedených vlastností platí na $S = A$, hovoríme, že f je rastúca (klesajúca, neklesajúca, nerastúca) funkcia. Rastúce, klesajúce, nerastúce a neklesajúce funkcie na množine S sa nazývajú monotónne na množine S, rastúce alebo klesajúce funkcie na množine S sa nazývajú rýdzo monotónne na množine S.

Párne a nepárne funkcie.

Definition 137 *Funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ *sa nazýva párna (nepárna), ak platí*

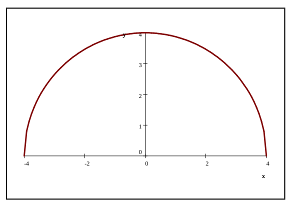
a) $\forall x \in A \Longleftrightarrow -x \in A$,

b) $f(x) = f(-x)$ $(f(-x) = -f(x))$, $\forall x \in A$.

Remark 138 *Existuje množina funkcií párnych, nepárnych a funkcií, ktoré nie sú ani párne, ale ani nepárne.*

Example 139 *Načrtnite graf funkcie* $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

Solution 140 *Máme:* $f : \langle -4, 4\rangle \to \boldsymbol{R}, f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. *Platí:* $\forall x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)$, $f(-x) = \sqrt{16 - (-x)^2} = \sqrt{16 - x^2} = f(x)$.*Funkcia je párna.*$\sqrt{16 - x^2}$



□

Periodické funkcie.

Definition 141 *Funkcia* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, *sa nazýva periodická, ak existuje také reálne číslo* $p > 0$, *že* $\forall x \in \boldsymbol{R}$ *platí* $f(x + p) = f(x)$. *Číslo* p *sa nazýva perióda funkcie* f. *Najmenšia perióda (ak existuje) sa nazýva základná perióda.*

Inverzná funkcia.

Nech $f : A \to B$, je funkcia (zobrazenie) definovaná na množine A s hodnotami v množine B. Hovoríme, že f je zobrazenie množiny A do množiny B. Nech $M \subset A$. Označme

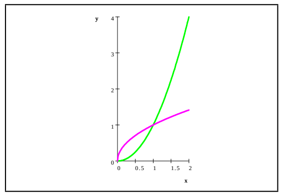
$$f(M) = \{y \in B\,;\ (y = f(x)) \wedge (x \in M)\}\,.$$

Definition 142 *Funkciu (zobrazenie)* $f : A \to B$ *nazývame injektívnou (prostou) ak* $\forall x_1, x_2 \in A\,;\ x_1 \neq x_2$ *platí* $f(x_1) \neq f(x_2)$. *Nech* $f : A \to B$, *je funkcia (zobrazenie) definované na množine* A *s hodnotami v množine* B. *Ak* $f(A) = B$, *hovoríme, že* f *je zobrazením na množinu* B, *alebo* f *je surjektívna funkcia (surjekcia). Funkciu (zobrazenie)* $f : A \to B$, *ktorá je injektívna a surjektívna nazývame bijektívna funkcia (bijekcia).*

Definition 143 *Nech* $f : A \to B$, *je bijekcia. Funkciu* $f^{-1} : B \to A$, *definovanú tak, že* $f^{-1}(y) = x$ *práve vtedy, keď* $f(x) = y$, *nazývame inverznou funkciou k funkcii* $f : A \to B$.

Example 144 *Nech* $h : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, $h(x) = x^2$. *Nájdite inverznú funkciu* h^{-1}.

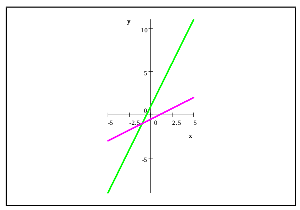
Solution 145 *Máme* $A = D(h) = B$*. Platí* $\forall x_1, x_2 \in \langle 0, \infty) \,;\, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$*,teda funkcia* h *je injekcia. Nech* $y \in \langle 0, \infty)\,,$ *potom* $\exists!\ x \in \langle 0, \infty)$ *také, že* $y = x^2$ $(x = \sqrt{y})$*, teda funkcia* h *je surjekcia. Preto* $h : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)\,,\, h(x) = x^2$ *je bijekcia a existuje inverzná funkcia* $h^{-1} : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)\,,\, h^{-1}(t) = \sqrt{t}$*. Na obrázku vidíme grafy oboch funkcií.*



$\square$

Example 146 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x + 1$*. Nájdite inverznú funkciu* $f^{\,-1}$

Solution 147 *Pretože* f *je bijekcia, inverzná funkcia existuje a máme:* $f^{\,-1} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f^{\,-1}(x) = \frac{x-1}{2}$*. Na obrázku vidíme grafy oboch funkcií:*



$\square$

Example 148 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \boldsymbol{R} \setminus \{2\}\,,\ f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$*. Nájdime inverznú funkciu* $f^{\,-1}$*.*

Solution 149 *Funkcia* f *je prostá (injektívna):* $\forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{4x_1+3}{2x_1-1} \neq \frac{4x_2+3}{2x_2-1}$ *t.j.* $f(x_1) \neq f(x_2)$*. Tvrdenie ukážeme sporom. Ak by* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1+3}{2x_1-1} = \frac{4x_2+3}{2x_2-1} \Rightarrow x_1 = x_2$*, pre* $x_1, x_2 \neq \frac{1}{2}$*. Nech* $y \in \boldsymbol{R} \setminus \{2\}$*, hľadáme nejaké* $x \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *aby* $y = f(x)$*. Teda* $y = \frac{4x+3}{2x-1} \Longrightarrow x = \frac{y+3}{2y-4}$*, ak* $y \neq 2$*. Teda* f *je surjekcia. Pretože* f *je bijekcia, existuje inverzná funkcia* $f^{\,-1} : \boldsymbol{R} \setminus \{2\} \to \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\,,\ f^{\,-1}(y) = \frac{y+3}{2y-4}$*. Načrtnite graf funkcie* f *aj* $f^{\,-1}$*.* $\square$

Remark 150 *Nech* $f : A \to B$ *je bijekcia. Potom z definície inverznej funkcie* $f^{\,-1} : B \to A$ *vyplýva, že* $f(x) = y \Longleftrightarrow f^{\,-1}(y) = x$*. Odtiaľ dostaneme*

$\forall x \in A$ *je* $\left(f^{\,-1} \circ f\right)(x) = x$,

$\forall y \in B$ *je* $\left(f \circ f^{\,-1}\right)(y) = y$,

to znamená že $f^{\,-1} \circ f : A \to A,\ \left(f^{\,-1} \circ f\right)(x) = x,\quad f \circ f^{\,-1} : B \to B,\ \left(f \circ f^{\,-1}\right)(y) = y$.

Ak $f : A \to B$ *je bijekcia a* $f^{\,-1} : B \to A$ *je k nej inverzná funkcia, potom*

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B\,;\, x \in A\}\,,$$

$$G(f^{\,-1}) = \left\{\left(y, f^{\,-1}(y)\right) = (f(x), x) \in B \times A\,;\, y \in B\right\}.$$

Teda graf funkcie f *a graf funkcie* $f^{\,-1}$ *sú súmerné podľa priamky* $y = x$*.*

Elementárne funkcie.

V tejto časti zopakujeme základné vlastnosti elementárnych funkcií, ktoré budeme používať v ďalších kapitolách.

Definition 151 *Konštantná funkcia* $f : \boldsymbol{R} \to \{c\}$, $f(x) = c \in \boldsymbol{R}$. *Grafom konštantnej funkcie je priamka rovnobežná s osou* o_x.

Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom $n \in \boldsymbol{N}$ *je funkcia* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^n$. *Mocninová funkcia so záporným celým exponentom* $-n$, *kde* $n \in \boldsymbol{N}$ *je funkcia* $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Funkcia n*-tá odmocnina* ($n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$) *je definovaná*

$$f : \begin{cases} \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty), \ f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, & \text{pre} \quad n \text{ párne} \\ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \ f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, & \text{pre} \quad n \text{ nepárne} \end{cases}, \text{ je rastúca funkcia }.$$

Algebrický polynóm $P : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $P(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_{n-1} x + c_n, c_0 \neq 0$,*kde* $c_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 0, 1, ..., n$ *nazývame koeficienty polynómu* f *a* $n \in \boldsymbol{N}$, *stupeň polynómu* P.

Racionálna funkcia $R : \boldsymbol{R} \setminus Q^\circ \to \boldsymbol{R}$, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$,*kde* P, Q *sú polynómy a* $Q^\circ = \{x \in \boldsymbol{R} : Q(x) = 0\}$.

Exponenciálna funkcia $f : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, $(a > 0, \ a \neq 1)$. *Pre* $a > 1$ *je* $f(x) = a^x$ *rastúca funkcia, pre* $0 < a < 1$ *je* $f(x) = a^x$ *klesajúca funkcia.*

Logaritmická funkcia. Pretože exponenciálna funkcia $f(x) = a^x$ *je rastúca pre* $a > 1$, *klesajúca pre* $0 < a < 1$, *existuje k nej inverzná funkcia, ktorú nazývame logaritmická funkcia so základom a:* $f : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \log_a x$.*Logaritmická funkcia je rastúca pre* $a > 1$, *klesajúca pre* $0 < a < 1$.

Ak $a = e \approx 2,7183...$ *je Eulerovo číslo, potom logaritmickú funkciu so základom* e *nazývame prirodzený logaritmus a označujeme* $\log_a x = \ln x$.

Mocninová funkcia s reálnym exponentom $a \in \boldsymbol{R} : f : (0, \infty) \to (0, \infty), f(x) = x^a = e^{a \ln x}$.

Example 152 *Nájdime hodnoty nasledujúcich funkcií:* $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[6]{(-2)^6}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[p]{1}$, $\sqrt[p]{0}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$, $\sqrt[5]{-32}$ *kde* $p \in \boldsymbol{N}$.

Solution 153 *Podľa predchádzajúcej definície platí:* $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[6]{(-2)^6} = 2$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[p]{1} = 1$, $\sqrt[p]{0} = 0$, $\sqrt[5]{-32} = -2$. *Výrazy* $\sqrt{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$ *nemajú zmysel.* $\square$

Remark 154 *Študenti často chybne určia funkčnú hodnotu párnej odmocniny. Často napríklad napíšu:* $\sqrt{4} = \pm 2$, *čo nie je správne. Tento omyl pochádza z faktu, že pri riešení rovnice* $x^2 = 4$, *ktorú možno napísať v tvare* $(x-2)(x+2) = 0$, *dostávame dva korene (riešenia)* $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, *čo kratšie zapisujeme ako* $x = \pm 2$.

Zhrnutie $\sqrt{4} = 2$ je funkčná hodnota druhej odmocniny (Nie $\sqrt{4} = \pm 2$!!!). Riešenie (korene) rovnice $x^2 = 4$ môžeme zapísať v tvare $x = \pm 2$.

Trigonometrické funkcie.
Zopakujme trigonometrické funkcie.

Definition 155 $f:\boldsymbol{R}\rightarrow\langle -1,1\rangle\,,\ f(x)=\sin x$,
$f:\boldsymbol{R}\rightarrow\langle -1,1\rangle\,,\ f(x)=\cos x$,
$f:\boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}\rightarrow\boldsymbol{R},\ f(x)=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$,
$f:\boldsymbol{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\}\rightarrow\boldsymbol{R},\ f(x)=\operatorname{cotg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$.

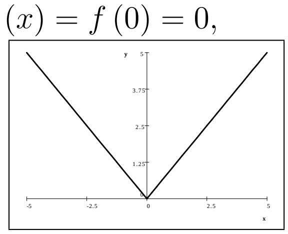
Pripomenieme niektoré trigonometrické identity:

$$\begin{gathered}
\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\ \forall x,\ y\in\boldsymbol{R}\\
\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,\ \forall x,\ y\in\boldsymbol{R}\\
\cos^2 x+\sin^2 x=1,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\\
\sin(-x)=-\sin x,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\\
\cos(-x)=\cos x,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\\
\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}\\
\operatorname{cotg}(-x)=-\operatorname{cotg}x,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\}\\
\operatorname{tg}x.\operatorname{cotg}x=1,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\pi,k\in\boldsymbol{Z}\right\}
\end{gathered}$$

Funkcie $\sin x$ a $\cos x$ sú periodické s periodou $T=2\pi$, $\operatorname{tg}x$ a $\operatorname{cotg}x$ sú periodické s periodou $T=\pi$.

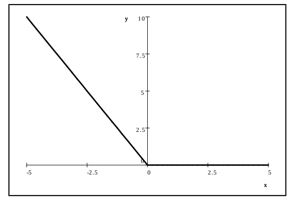
Cvičenia.

1. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x} + \log(1-x^2)$. $[D(f) = (-1,0) \cup (0,1)]$
2. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \ln(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$. $[D(f) = (2,3)$.]
3. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$. [Funkcia nie je nikde definovaná]
4. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}}$. $[D(f) = \boldsymbol{R}]$
5. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \ln \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$. $[D(f) = (4,5) \cup (6,\infty)]$
6. Daná je funkcia $f(x) = \log\left(\frac{x^2-2}{x}\right)$. Nájdite
   (a) definičný obor funkcie,
   (b) všetky reálne čísla, pre ktoré je $f(x) > 0$.
   $\left[D(f) = \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)\right.$. Ak $x \in (-1,0) \cup (2,\infty)$, potom $\left.f(x) > 0\right]$
7. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{x}{\log(1-x)}$. $[D(f) = (-\infty, 0) \cup (0,1)$, ani párna ani nepárna.]
8. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = x[\log(x+1) - \log x]$. $[D(f) = (0,\infty)$, f ani párna ani nepárna.]
9. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = 1 - \sqrt{2\cos 2x}$. $[D(f) = (0,\infty)$, f ani párna ani nepárna.]
10. Pre funkciu $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ nájdite definičný obor, nulové body (body, v ktorých je $f(x) = 0$), všetky reálne čísla, pre ktoré je $f(x) > 0$ a $f(x) < 0$. [Rozložte funkciu $f(x) = x(x-a)(x-b)$.]
11. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = 2^{-x^2}$. $[D(f) = \boldsymbol{R}$, párna]
12. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, $a > 0$. $[D(f) = \boldsymbol{R}$, párna]
13. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$, $a > 0$. $[D(f) = \boldsymbol{R}$, nepárna]
14. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. $[D(f) = (-1,1)$, nepárna]
15. Pre funkciu $f(x) = |x|$ nájdite definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená a načrtnite jej graf.

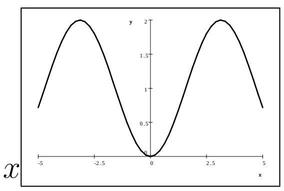
   [$D(f) = \boldsymbol{R}$, na $(-\infty, 0)$ je klesajúca, na $(0,\infty)$ je rastúca,
   zdola ohraničená $\min_{x\in\boldsymbol{R}} f(x) = f(0) = 0$,
   nie je zhora ohraničená. Graf : 

   ]

16. Pre funkciu $f(x) = |x| - x$ nájdite definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená a načrtnite jej graf.

[$D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(x) = |x| - x = \begin{cases} -2x & \text{pre} \quad x < 0 \\ 0 & \text{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$,
na $(-\infty, 0)$ je klesajúca, na $(0, \infty)$ je konštantná,
zdola ohraničená $\min_{x\in\boldsymbol{R}} f(x) = 0$. Graf : ]

17. Pre funkciu $f(x) = 1 - \cos x$ určte definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená, nájdite jej supremum, infimum, maximum, minimum a načrtnite jej graf.

[$D(f) = \boldsymbol{R}$, na intervaloch $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ je rastúca,
na intervaloch $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$ je klesajúca,
$\min_{x\in\boldsymbol{R}} f(x) = f(k\pi) = 0$,
$\max_{x\in\boldsymbol{R}} f(x) = f(\pi + k\pi) = 2$.Graf $f(x) = 1 - \cos x$ ]

18. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu, ak $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$. [$D(f) = \boldsymbol{R}$, $H(f) = \langle 1, \infty)$, zdola ohraničená
$\min_{x\in\boldsymbol{R}} f(x) = f(0) = 1$.
Nie je prostá preto nemá inverznú funkciu.]

19. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x) = -4 + 3\sqrt{x}$.

[$D(f) = \langle 0, \infty)$, $H(f) = \langle -4, \infty)$, je prostá $f^{-1} : \langle -4, \infty) \to \langle 0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \left(\frac{x+4}{3}\right)^2$.]

20. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x) = 1 + \ln(x + 2)$.

[$D(f) = (-2, \infty)$, $H(f) = \boldsymbol{R}$,
je prostá $f^{-1} : \boldsymbol{R} \to (-2, \infty)$, $f^{-1}(x) = -2 + e^{x-1}$.]

Chapter 6 LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE.

Pomocné pojmy.

Infimum a supremum číselnej množiny.

Definition 156 *Množina* $S \subset \boldsymbol{R}$ *je ohraničená zdola ak* $\exists\ m \in \boldsymbol{R}$ *také, že* $m \leq x,\ \forall x \in S$. *Každé číslo* m *s touto vlastnosťou nazývame dolné ohraničenie množiny* S.

Definition 157 *Množina* $S \subset \boldsymbol{R}$ *je ohraničená zhora ak* $\exists\ M \in \boldsymbol{R}$ *také, že* $x \leq M,\ \forall x \in S$. *Každé číslo* M *s touto vlastnosťou nazývame horné ohraničenie množiny* S.

Definition 158 *Číslo* m *nazývame infimom (najväčším dolným ohraničením) množiny* $S \subset \boldsymbol{R}$*, ak pre každé dolné ohraničenie* n *množiny* S *platí* $n \leq m$*, čo označujeme* $m = \inf S$. *Ak* $m \in S$ *infimum sa nazýva minimum množiny* S *a označuje* $m = \min S$.

Definition 159 *Číslo* M *nazývame supremom (najmenším horným ohraničením) množiny* $S \subset \boldsymbol{R}$*, ak pre každé horné ohraničenie* N *množiny* S *platí* $N \geq M$*, čo označujeme* $M = \sup S$. *Ak* $M \in S$ *supremum sa nazýva maximum množiny* S *a označuje* $M = \max S$.

Example 160 *Daná je množina* $S = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$. *Zistite, či je ohraničená, ak áno nájdite jej infimum a supremum, prípadne minimum a maximum.*

Solution 161 *Množina* $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\} \subset \boldsymbol{R}$. *Ako vidieť množina* S *je ohraničená. Dolným ohraničením tejto množiny je napríklad číslo* $m = -10$*, pretože platí:* $-10 \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \boldsymbol{N}$. *Je jasné, že aj číslo* $m = -2$ *je dolným ohraničením. Podobne aj číslo* $m = 0$ *je dolným ohraničením. Každé nekladné reálne číslo je dolným ohraničením množiny* S. *Žiadne kladné reálne číslo* $p > 0$ *nemôže byť dolným ohraničením množiny* S*, pretože pre každé reálne číslo* $p > 0$ *existuje prirodzené číslo* n *s vlastnosťou* $\frac{1}{n} < p$ *(Archimedova vlastnosť). Preto najväčším dolným ohraničením - infimom množiny* S *je číslo* $m = 0$.*Tento fakt zapíšeme* $\inf S = 0$. *Číslo* 0 *nie je minimum množiny* S*, pretože* $0 \notin S$. *Podobne postupujeme aj pri hľadaní horného ohraničenia. Horným ohraničením množiny* S *je napríklad číslo* $M = 1000$*, pretože platí:* $1000 \geq \frac{1}{n},\ \forall n \in N$. *Aj číslo* $M = 2$ *je horným ohraničením. Pretože pre každé prirodzené číslo* $n \in \boldsymbol{N}$ *platí* $\frac{1}{n} \leq 1$*, tak najmenším horným ohraničením - supremom množiny* S *je číslo* $M = 1$.*Tento fakt zapíšeme* $\sup S = 1$. *Číslo* 1 *je aj maximum množiny* S*, pretože* $1 \in S$. *Tak zapíšeme:* $\sup S = \max S = 1$.$\square$

Okolie bodu.

Definition 162 *Nech* $\varepsilon > 0,\ a \in \boldsymbol{R}$. *Množinu*

Definition 163 *a)* $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ *nazývame* ε*-ovým okolím bodu* $a \in \boldsymbol{R}$.

b) $O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ *nazývame* ε*-ovým okolím bodu* ∞.
c) $O_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ *nazývame* ε*-ovým okolím bodu* $-\infty$.

Definition 164 *Nech* $\varepsilon > 0$. *Prstencovým* ε*-ovým okolím bodu* $a \in \boldsymbol{R}$, *nazývame množinu* $O_\varepsilon^\circ(a)$, *takú že*
a) $O_\varepsilon^\circ(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, *pre* $a \in \boldsymbol{R}$,
b) $O_\varepsilon^\circ(\infty) = O_\varepsilon(\infty)$,
c) $O_\varepsilon^\circ(-\infty) = O_\varepsilon(-\infty)$.

Je zrejmé, že pre $a \in \boldsymbol{R}$ platí :

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \boldsymbol{R} : \ |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),$$

$$O_\varepsilon^\circ(a) = \{x \in \boldsymbol{R} : \ 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$

Definition 165 *Nech* $\emptyset \neq M \subset \boldsymbol{R}$. *Bod* $a \in \boldsymbol{R}$ *nazývame hromadným bodom množiny* M, *ak pre každé* $O_\varepsilon^\circ(a)$ *existuje* $x \in M \cap O_\varepsilon^\circ(a)$.

Ľahko sa dá ukázať, že bod $a \in \boldsymbol{R}$ je hromadným bodom množiny M vtedy a len vtedy, ak v každom $O_\varepsilon^\circ(a)$ leží nekonečne veľa bodov z množiny M.

Example 166 *Nech* $M = (a, b)$. *Nájdite množinu hromadných bodov množiny* M.

Solution 167 *Každý bod z intervalu* $\langle a, b\rangle$ *je hromadným bodom množiny* $M = (a, b)$, *pretože*
a) Ľubovoľné prstencové ε*-okolie každého bodu z* $\langle a, b\rangle$ *má s množinou* (a, b) *neprázdny prienik, t.j.* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall c \in \langle a, b\rangle$, $O_\varepsilon^\circ(c) \cap (a, b) \neq \emptyset$.
b) Ak $c \notin \langle a, b\rangle$, *potom bod* c *nie je hromadný bod. Nech napríklad* $c > b \Longrightarrow c - b > 0$ *(podobne skúmame aj prípad* $c < a$*). Potom* $\exists \varepsilon' : 0 < \varepsilon' < c - b$ *a platí* $O_{\varepsilon'}^\circ(c) \cap (a, b) = \emptyset$. $\square$

Example 168 *Nech* $M = \boldsymbol{N}$. *Nájdite množinu hromadných bodov množiny* M.

Solution 169 *Jediným hromadným bodom množiny* M *je* ∞, *pretože iba pre bod* ∞ *a jeho ľubovoľné okolie* $O_\varepsilon^\circ(\infty) = O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ $\exists$ *bod* $n \in \boldsymbol{N}$, *taký že* $n \in O_\varepsilon^\circ(\infty)$ *(známa Archimedova vlastnosť:* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \boldsymbol{N} : \frac{1}{\varepsilon} < n$*). Pre ľubovoľné* $a \in \boldsymbol{R}$, *t.j.* $a \neq \infty$, *potom* $\exists \varepsilon' > 0 \wedge O^\circ{}_{\varepsilon'}(a)$, *také že* $O_{\varepsilon'}^\circ(a) \cap \boldsymbol{N} = \emptyset$. $\square$

Example 170 *Daná je množina* $M = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$. *Nájdite množinu hromadných bodov množiny* M.

Solution 171 *Jediným hromadným bodom je bod* 0. *(z podobných dôvodov ako v predchádzajúcom príklade.)*

Definícia limity funkcie v bode.

Intuitívny pojem limity.

Keď povieme, že „L je limitou funkcie f v bode a”, myslíme tým hrubo povedané, že $f(x)$ sa „približuje” ku L, keď sa x

„približuje” ku a. Túto myšlienku symbolicky zapíšeme zápisom:

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L.$$

Je veľmi jednoduché nájsť niektoré limity. Napríklad ak sa x „blíži” ku 1, potom sa $x+1$ „blíži” ku 2. Teda

$$\lim_{x\longrightarrow 1} (x+1) = 2.$$

Podobne ak x „sa blíži ku” -2, tak x^2 „sa blíži ku” 4 a x^2-5 „sa blíži ku” -1. To znamená

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \left(x^2-5\right) = -1.$$

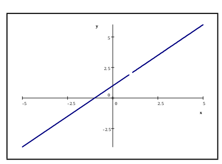
Sú však prípady funkcií, keď hľadanie limity nie je také jednoduché a vyžaduje si určitú zručnosť. Uvažujme funkciu

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ a hľadajme $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Keď $x \to 1$ tak $(x^2-1) \to 0$ aj $(x-1) \to 0$, mohlo by sa teda zdať, že limitou bude podiel $\frac{0}{0}$, ktorý však nie je definovaný. Musíme teda zvoliť iný prístup. Ľahko zistíme, že platí $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$,pre $x \neq 1$.

Tak položíme $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} (x+1) = 2$.

Takto sme ukázali, že v nejakom prstencovom okolí bodu $x=1$ sme funkciu $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ nahradili funkciou $g(x) = x+1$ (pretože sa v tomto prstencovom okolí rovnajú) a limitu tejto náhradnej funkcie sme vypočítali. Obrázok funkcie $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ v okolí bodu $x=1$.



Teraz celý tento postup zhrnieme do presnej matematickej formulácie.

Definícia limity funkcie v bode.

Definition 172 *Nech $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ je funkcia a $a \in \boldsymbol{R}$ je hromadný bod množiny A. Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu $L \in \boldsymbol{R}$, ak pre každé $O_\varepsilon(L)$ existuje $O_\delta^\circ(a)$ také, že $f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(L)$, (skrátene $\forall O_\varepsilon(L)\, \exists O_\delta^\circ(a) \Longrightarrow f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(L)$), tento fakt označujeme symbolom* $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Ak budeme hľadať limitu funkcie $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, budeme vždy predpokladať, že $a \in \boldsymbol{R}$ je hromadný bod množiny A. Limitu funkcie sme definovali pomocou okolí. Niekedy je výhodnejšie používať definíciu limity v inej ekvivalentnej forme, keď okolia nahradíme nerovnicami. Napríklad pre $a \in \boldsymbol{R}$, $L \in \boldsymbol{R}$ máme

$O_\delta^\circ(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, $O_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ a definíciu limity funkcie v bode $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L$ môžme napísať v tvare:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pre $a \in \boldsymbol{R}$, $L = \infty$ máme, $O_\delta^\circ(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, $O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ a definíciu limity funkcie v bode

$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \infty$ môžme napísať v tvare: $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Pre $a \in \boldsymbol{R}$, $L = -\infty$ máme $O_\delta^\circ(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, $O_\varepsilon(L) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ a definíciu limity funkcie v bode

$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = -\infty$ môžme napísať v tvare: $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Pre $a = \infty$, $L \in \boldsymbol{R}$ máme $O_\delta^\circ(\infty) = O_\delta(\infty) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right)$, $O_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ a definíciu limity funkcie v bode

$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = L$ môžme napísať v tvare: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in A,\ x > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Pre $a = -\infty$, $L \in \boldsymbol{R}$ máme $O_\delta^\circ(a) = O_\delta(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right)$, $O_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ a definíciu limity funkcie v bode

$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = L$ môžme napísať v tvare: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in A, x < -\frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Pre $a = \infty, L = \infty$ máme $O_\delta^\circ(\infty) = O_\delta(\infty) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right)$, $O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ a definíciu limity funkcie v bode $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$

môžme napísať v tvare: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in A,\ x > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Zostávajúce možnosti $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \infty$, si čitateľ napíše sám.

Example 173 *Nech $f(x) = c$, $c \in \boldsymbol{R}$. Ukážme, že $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = c$, kde $a \in \boldsymbol{R}$ je ľubovoľný bod.*

Solution 174 *Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Potom pre každé $\delta > 0$ máme, $O_\delta^\circ(a) \cap \boldsymbol{R} = O_\delta^\circ(a)$ a platí $f(O_\delta^\circ(a) \cap \boldsymbol{R}) = f(O_\delta^\circ(a)) = \{c\} \subset O_\varepsilon(c)$. Teda pre každé $O_\varepsilon(c)$ existuje $O_\delta^\circ(a)$ také, že $f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(c)$, čo znamená, že $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = c$.* $\square$

Example 175 *Ukážme, že $\lim_{x\longrightarrow a} x = a$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$.*

Solution 176 *Máme $f(x) = x$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Hľadáme vhodné $\delta > 0$. Ak zvolíme $\delta = \varepsilon$, potom máme $O_\delta^\circ(a) \cap \boldsymbol{R} = O_\delta^\circ(a)$ a $f(O_\delta^\circ(a) \cap \boldsymbol{R}) = f(O_\delta^\circ(a)) = O_\varepsilon^\circ(a) \subset O_\varepsilon(a)$. Pomocou nerovníc zapíšeme ako: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \varepsilon > 0 :\ \forall x \in \boldsymbol{R}$, $0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |x-a| < \varepsilon$.* $\square$

Example 177 *Ukážme, že $\lim_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0$.*

Solution 178 *Pre funkciu $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$ chceme ukázať, že $\forall O_\varepsilon(0)\ \exists O_\delta^\circ(0)$: $f(O_\delta^\circ(0) \cap \boldsymbol{R}) \subset O_\varepsilon(0)$. Stačí ak zvolíme $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, potom platí: $0 < |x| < \delta = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow |x^2 - 0| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$ to znamená, že $\forall O_\varepsilon(0)\ \exists O_{\sqrt{\varepsilon}}^\circ(0)$: $f\left(O_{\sqrt{\varepsilon}}^\circ(0) \cap \boldsymbol{R}\right) = f\left(O_{\sqrt{\varepsilon}}^\circ(0)\right) = O_\varepsilon^\circ(0) \subset O_\varepsilon(0)$. teda $\lim_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0$.* $\square$

Example 179 *Ukážme, že pre každé $a > 0$ je* $\lim_{x \longrightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Solution 180 *Pre funkciu* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ *máme ukázať, že* $\forall O_\varepsilon(\sqrt{a})\ \exists O_\delta^\circ(a) : f(O_\delta^\circ(a) \cap \langle 0, \infty)) \subset O_\varepsilon(\sqrt{a})$ *.Platí*

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)\right| = \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| < |x - a| \frac{1}{\sqrt{a}},$$

potom stačí voliť $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$. □

Example 181 *Ukážme, že platí* $\lim_{x \longrightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \longrightarrow 0} \cos x = 1$.

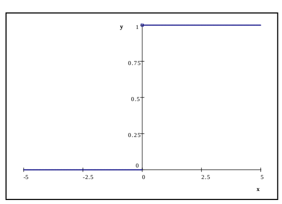
Solution 182 *Platí nerovnica* $|\sin x| \leq |x|$, *pre* $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, *potom pre* $\sin : \boldsymbol{R} \to \langle -1, 1\rangle$, *máme: ak* $\varepsilon > 0$ *je ľubovoľné a položíme* $\delta = \varepsilon$, *tak pre* $x \in O_\delta^\circ(0)$, *platí* $|\sin x - 0| = |\sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$,*teda* $f(O_\delta^\circ(0) \cap \boldsymbol{R}) \subset O_\varepsilon(0)$, *t.j.* $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$. *Druhú limitu dostaneme použitím nerovnice* $|\cos x - 1| \leq |x|$, *pre* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
□

Negácia existencie limity.

Preto, aby funkcia $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ nemala v hromadnom bode $a \in \boldsymbol{R}$ limitu musí byť nepravdivé tvrdenie, že „L je limitou funkcie f v bode a". Pre ľubovoľné L teda musí existovať $O_\varepsilon(L)$ také, že pre každé $O_\delta^\circ(a)$ nie je pravda, že $f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(L)$, t.j. $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\, \exists x \in A : 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon$ pre a, L konečné (s patričnými úpravami pre $a = \pm\infty$, $L = \pm\infty$).

Example 183 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & pre \quad x < 0 \\ 1 & pre \quad x \geq 0 \end{cases}$ *. Ukážme, že* $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ *neexistuje.*

Solution 184 *Načrtneme graf funkcie* $f(x)$.



Nech by táto limita existovala a rovnala sa číslu L. Ukážeme, že $\forall L \in \boldsymbol{R}$ *je tvrdenie: „číslo L je limitou funkcie f v bode 0" nepravdivé. Nech* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *a* $\delta > 0$ *je ľubovoľné. Potom ak by L bola limitou funkcie f platí jedna z možností:* $L \leq \frac{1}{2}$ *alebo* $L > \frac{1}{2}$*:*

a) Ak $L \leq \frac{1}{2}$, *bod* $x = \frac{\delta}{2} \in O_\delta^\circ(0)$ *a* $f\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 \notin O_{\frac{1}{2}}(L)$, *pretože* $\left|f\left(\frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |1 - L| = 1 - L \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon$.

b) Ak by $L > \frac{1}{2}$, *vezmeme bod* $x = -\frac{\delta}{2} \in O_\delta^\circ(0)$ *a* $f\left(-\frac{\delta}{2}\right) = 0 \notin O_{\frac{1}{2}}(L)$, *pretože* $\left|f\left(-\frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |0 - L| = L > \frac{1}{2} = \varepsilon$. *Tak v každom prípade* $\exists O_{\frac{1}{2}}(L) : \forall O_\delta^\circ(0)$ *nie je pravda, že* $f(O_\delta^\circ(0) \cap \boldsymbol{R}) \subset O_{\frac{1}{2}}(L)$ *,teda* $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ *neexistuje.*
□

Vety o limitách.

Theorem 185 *Ak limita funkcie $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ v bode a, ktorý je hromadný bod množiny A existuje, tak je jediná.*

Theorem 186 *(O nerovnostiach medzi limitami) Nech $f, g, h : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, a je hromadný bod množiny A. Nech $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in A$. Ak $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} h(x) = L \in \boldsymbol{R}$,potom aj $\lim_{x \longrightarrow a} g(x)$ existuje a $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = L$.*

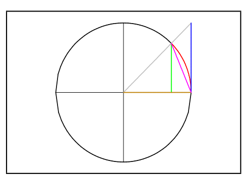
Example 187 *Ukážme, že $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.*

Solution 188 *Pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ máme $|\sin x| \leq |x|$. Uvažujme kružnicu so stredom v začiatku súradnicovej sústavy, s polomerom $r = 1$. Z obrázku č. 1 máme: plocha trojuholníka ohraničeného fialovou, sivou a hnedou čiarou je $P_{MTROJ} = \frac{\sin x}{2}$, plocha kruhového výseku ohraničeného osou o_x, sivou a hnedou čiarou a červenou časťou kružnice je $P_{VYS} = \frac{x}{2}$,plocha trojuholníka ohraničeného modrou, sivou stranou a osou o_x je $P_{VTROJ} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Z geometrického náhľadu je jasné, že*

$P_{MTROJ} \leq P_{VYS} \leq P_{VTROJ}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, t.j. $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2 \cos x}$,

odkiaľ $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Pretože $\cos(-x) = \cos x$ a $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ posledná nerovnosť platí pre $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Potom z nerovnosti a z vety o nerovnostiach medzi limitami plynie $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □



Obrázok č. 1

Lemma 189 *Nech $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$ a $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = 0$, a je hromadný bod množiny A. Potom $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) g(x) = 0$.*

Theorem 190 *Nech $f, g : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, a je hromadný bod množiny A. Nech $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = M$, $L, M \in \boldsymbol{R}$. Potom*

a) Veta o limite absolútnej hodnoty funkcie $\lim_{x \longrightarrow a} |f|(x) = \lim_{x \longrightarrow a} |f(x)| = |L|$,

b) Veta o limite súčtu funkcií $\lim_{x \longrightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \longrightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) + \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = L + M$,

c) Veta o limite násobku funkcie číslom $\lim_{x \longrightarrow a} (cf)(x) = \lim_{x \longrightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = cL, \forall c \in \boldsymbol{R}$,

d) Veta o limite súčinu funkcií $\lim_{x \longrightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) g(x) =$
$= \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = LM$,

e) Veta o limite podielu funkcií. Nech $\forall x \in A$, $g(x) \neq 0$, $M \neq 0$, tak $\lim_{x \longrightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \longrightarrow a} f(x)}{\lim_{x \longrightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$.

Ukázali sme, že platí $\lim_{x\longrightarrow a} c = c$, $\lim_{x\longrightarrow a} x = a$, $\lim_{x\longrightarrow a} cx = ca$, $\lim_{x\longrightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, pre $a > 0$, $\lim_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0$. Pomocou týchto limít a vyššie uvedených viet budeme počítať nasledujúce limity:

Example 191 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow 0} (x^2 + \cos x)$.

Solution 192 $\lim_{x\longrightarrow 0} (x^2 + \cos x) = \lim_{x\longrightarrow 0} x^2 + \lim_{x\longrightarrow 0} \cos x = 0 + 1 = 1.$ □

Jednoduché zovšeobecnenie vety o limite súčtu: Ak $\lim_{x\longrightarrow a} f_i(x)$, $i = 1, ..., n$ existujú, potom existuje aj

$$\lim_{x\longrightarrow a} [f_1(x) + ... + f_n(x)] = \lim_{x\longrightarrow a} f_1(x) + ... + \lim_{x\longrightarrow a} f_n(x).$$

Example 193 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{1}{2}\sqrt{x}$, *pre* $a > 0$.

Solution 194 *Podľa vety o limite násobku funkcie dostaneme* $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\longrightarrow a} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{a}}{2}$. □

Example 195 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$.

Solution 196 *Pretože limita čitateľa aj menovateľa je nulová, nemôžeme použiť vetu o limite podielu priamo, ale v prstencovom okolí bodu* -2 *sa funkcie* $\frac{(x+2)\left(x^2-1\right)}{(x+2)(x-2)}$ *a* $\frac{x^2-1}{x-2}$ *rovnajú, preto platí :*
$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(x+2)\left(x^2-1\right)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2-1}{x-2} = -\frac{3}{4}$.□

Ak vo vete o limite násobku funkcie zvolíme $c = -1$, potom dostaneme $\lim_{x\longrightarrow a} [-f(x)] = -\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$, potom dostaneme aj vetu o limite rozdielu funkcií: ak $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L$ a $\lim_{x\longrightarrow a} g(x) = M$, $L, M \in \boldsymbol{R}$, potom
$\lim_{x\longrightarrow a} (f-g)(x) = \lim_{x\longrightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\longrightarrow a} f(x) - \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = L - M$.

Theorem 197 *(Veta o limite zloženej funkcie.) Nech* $g : A \to B, f : C \to D, A, B, C, D \subset \boldsymbol{R}$, $\emptyset \neq H(g) \cap C$, a *je hromadný bod*

množiny A. Ak $\lim_{x\longrightarrow a} g(x) = c$ *a v nejakom* $O_\delta^\circ(a)$ *platí, že* $g(x) \neq c$. Ak $\lim_{y\longrightarrow c} f(y) = L$, *potom* $\lim_{x\longrightarrow a} f(g(x)) = L$.

Example 198 *Ukážme, že* $\forall a \in \boldsymbol{R}$ *platí* $\lim_{x\longrightarrow a} \sin x = \sin a$, $\lim_{x\longrightarrow a} \cos x = \cos a$.

Solution 199 *Platí:*

$$\lim_{x\longrightarrow a} \sin x = \lim_{x\longrightarrow a} \sin(x - a + a) = \lim_{x\longrightarrow a} [\sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a] =$$

$$= \sin a \lim_{x\longrightarrow a} \cos(x-a) + \cos a \lim_{x\longrightarrow a} \sin(x-a) = \sin a.\square$$

Example 200 *Nájdime* $\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x}$.

Solution 201 *Pretože* $\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{6}}\sin x=\frac{1}{2}$ *a* $\lim_{y\longrightarrow\frac{1}{2}}\sqrt{y}=\sqrt{\frac{1}{2}}$, *tak* $\lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Všetky doterajšie úvahy sú platné aj pre prípad, keď $a=-\infty,\ \infty$. Len v tom prípade pri formulácii výsledkov je potrebné
zameniť $O_{\delta}^{\circ}(a)$ za $O_{\delta}^{\circ}(-\infty)$, alebo $O_{\delta}^{\circ}(\infty)$. Zatiaľ bez dôkazu:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Limita zúženia funkcie.

Theorem 202 *Nech* $f:A\rightarrow\boldsymbol{R}$, $A\subset\boldsymbol{R}$, $C\subset A$. *Nech* a *je hromadný bod množiny* A *aj množiny* C. *Nech* $g=f|_{C}$. *Potom ak* $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=L$, *tak aj* $\lim_{x\longrightarrow a}g(x)=L$.

Remark 203 *Nech* $f:A\rightarrow\boldsymbol{R}$ *a* a *je hromadným bodom množín* $C^{-}=(-\infty,a\rangle\cap A$ *aj* $C^{+}=\langle a,\infty)\cap A$, *teda aj množiny* A.

Ak $g=f|_{C^{-}}$ *a* $\lim_{x\rightarrow a}g(x)=L$, *hovoríme, že* L *je limitou zľava funkcie* $f:A\rightarrow\boldsymbol{R}$ *v bode* a *a označuje sa* $\lim_{x\longrightarrow a^{-}}f(x)=\lim_{x\longrightarrow a}g(x)=L=f(a-)=f(a-0)$. *Podobne ak* $h=f|_{C^{+}}$ *a* $\lim_{x\rightarrow a}h(x)=L$, *hovoríme, že* L *je limitou sprava funkcie* $f:A\rightarrow\boldsymbol{R}$ *v bode* a *a označuje sa* $\lim_{x\longrightarrow a^{+}}f(x)=\lim_{x\longrightarrow a}h(x)=L=f(a+)=f(a+0)$.

Example 204 *Ukážme, že* $\lim_{x\longrightarrow 0^{+}}\sqrt{x}=0$.

Solution 205 *Nech* $\varepsilon>0$ *ľubovoľné. Zvoľme* $\delta=\varepsilon^{2}$. *Ak* $0<x<\delta$, *máme* $\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$, *t.j.*

$$\forall O_{\varepsilon}(0)\ \exists O_{\delta}^{\circ}(0)\Longrightarrow f\left(O_{\delta}^{\circ}(0)\cap\langle 0,\infty)\right)\subset O_{\varepsilon}(0),$$

čo znamená $\lim_{x\longrightarrow 0^{+}}\sqrt{x}=0$. □

Example 206 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow 0^{+}}\frac{x^{\frac{3}{2}}-3x+2}{x-2\sqrt{x}+1}$.

Solution 207 *Pretože* $x^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{x}\right)^{3}$ *a* $\lim_{x\longrightarrow 0^{+}}\sqrt{x}=0$, *tak aj* $\lim_{x\longrightarrow 0^{+}}x^{\frac{3}{2}}=0$, *teda podľa vety o limite podielu dvoch funkcií dostaneme*
$\lim_{x\longrightarrow 0^{+}}\frac{x^{\frac{3}{2}}-3x+2}{x-2\sqrt{x}+1}=\frac{0-3.0+2}{0-2.0+1}=2$. □

Pri výpočte jednostranných limít je potrebné dať pozor pri aplikácii vety o limite zloženej funkcie.

Example 208 *Vypočítajte* $\lim_{x\longrightarrow 1^{-}}\sqrt{1-x^{2}}$.

Solution 209 *Nech* $g(x)=1-x^{2}$ *a* $f(y)=\sqrt{y}$. *Potom* $\lim_{x\longrightarrow 1^{-}}(1-x^{2})=0$ *a* $\lim_{y\longrightarrow 0^{+}}\sqrt{y}=0$, *t.j. ak* $0<x<1$, *tak* $g(x)=1-x^{2}>0$ *a* $f(g(x))=\sqrt{1-x^{2}}$ *existuje a* $\lim_{x\longrightarrow 1^{-}}\sqrt{1-x^{2}}=0$. □

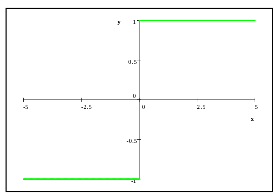
Remark 210 *Ak by sme mali počítať* $\lim_{x\longrightarrow 1^+}\sqrt{1-x^2}$*, potom pre* $x>1$ *je* $g(x)=1-x^2<0$ *a* $f(g(x))=\sqrt{1-x^2}$ *nie je pre* $x>1$ *definovaná, preto* $\lim_{x\longrightarrow 1^+}\sqrt{1-x^2}$ *neexistuje.*

Example 211 *Nech* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 0 & pre & x<0 \\ 1 & pre & x\geq 0 \end{array}\right.$. *Nájdime* $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$ *a ukážme, že* $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$ *neexistuje. Vypočítajte* $\lim_{x\longrightarrow 1^-}\sqrt{1-x^2}$.

Solution 212 *V príklade 183 sme ukázali, že* $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$ *neexistuje. Pretože je* $\lim_{x\longrightarrow 0^-} 0=0$*, máme* $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=0$*, podobne pretože* $\lim_{x\longrightarrow 0^+} 1=1$ *aj* $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=1$*. Tak obe jednostranné limity v bode* 0 *existujú, ale sa nerovnajú a preto* f *nemá v bode* 0 *limitu.* $\square$

Example 213 *Nech* $f:\boldsymbol{R}\setminus\{0\}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\frac{x}{|x|}$*. Nájdime* $f(0-), f(0+)$ *a* $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$*.*

Solution 214 *Načrtneme graf funkcie* f*.*



$f(0-)=\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\longrightarrow 0^-}(-1)=-1$ *a* $f(0+)=\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\longrightarrow 0^+} 1=1$*. To znamená, že* $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$ *neexistuje.* $\square$

Theorem 215 *Nech* $f:A\to\boldsymbol{R}$, $A\subset\boldsymbol{R}$, a *je hromadný bod množín* C^-, C^+, A*. Potom* $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$ *existuje vtedy a len vtedy ak existujú* $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x)$ *a* $\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x)$ *a platí* $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x)$*. Potom* $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$*.*

Nevlastná limita.

Definition 216 *Nech* $f:A\to\boldsymbol{R}$, $A\subset\boldsymbol{R}$, a *je hromadný bod množiny* A*. Nech* $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=L$*. Ak* $L\in\boldsymbol{R}$*, tak číslo* L *nazývame vlastnou limitou funkcie* f *v bode* a*. Ak* $L\in\{-\infty,\infty\}$*, potom* L *nazývame nevlastnou limitou funkcie* f *v bode* a*.*

Vo vete 190 sme formulovali pravidlá pre výpočet vlastných limít. Pre nevlastné limity platí nasledujúca veta:

Theorem 217 *Nech* $f,g:A\to\boldsymbol{R}, A\subset\boldsymbol{R}$, a *je hromadný bod množiny* $A, c\in\boldsymbol{R}$*.*

a) (Veta o limite opačnej funkcie) Ak existuje $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$*, tak* $\lim_{x\longrightarrow a}(-f)(x)=-\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$*,*

b) (Veta o limite súčtu) Nech $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=\infty$ *a* $\forall x\in A$ *je* $g(x)\geq c$*, potom* $\lim_{x\longrightarrow a}(f+g)(x)=\infty$*,*

c) (Veta o limite súčinu) Nech $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=\infty$ *a* $\forall x\in A$ *je* $g(x)\geq c>0$*, potom* $\lim_{x\longrightarrow a}(fg)(x)=\infty$*,* *d) (Veta o nulovej limite prevrátenej hodnoty funkcie) Nech* $\lim_{x\longrightarrow a}|f|(x)=\infty$ *a* $\forall x\in A$ *je* $f(x)\neq 0$, *potom* $\lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=0$,

e) (Veta o nevlastnej limite prevrátenej hodnoty funkcie) Nech $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=0$ *a* $\forall x\in A$ *je* $f(x)>0$, *potom* $\lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\infty$.

Example 218 *Nech* $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. *Ukážte, že* $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x}=0$ *a* $\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Solution 219 *Vieme, že* $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}|x|=\infty$, *preto podľa vety o nulovej limite prevrátenej funkcie je* $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\frac{1}{x}=0$. $\square$

Example 220 *Nech* $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\in\mathbf{N}$. *Potom* $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

Solution 221 *Platí* $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}|x^n|=\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}|x|^n=\infty$, *preto podľa vety o nevlastnej limite prevrátenej hodnoty funkcie je* $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$. $\square$

Example 222 *Ukážme, že* $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{c}{x^2}=0$, *kde* $c\in\mathbf{R}$ *je ľubovoľná konštanta.*

Solution 223 $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{c}{x^2}=c\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x^2}=0$, $\forall c\in\mathbf{R}$. $\square$

Example 224 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow\infty}(x^2+\sin x)$.

Solution 225 *Pretože* $\sin x\geq -1$, $\forall x\in\mathbf{R}$, *potom podľa vety o limite súčtu* $\lim_{x\longrightarrow\infty}(x^2+\sin x)=\infty$. $\square$

Example 226 *Nájdime* $\lim_{x\longrightarrow\infty}(2x^3-4x+5)$.

Solution 227 *Limitu napíšeme v tvare:* $\lim_{x\longrightarrow\infty}(2x^3-4x+5)=\lim_{x\longrightarrow\infty}x^3\left(2-4\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)$.

Pretože $\lim_{x\longrightarrow\infty}x^3=\infty$ *a* $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(2-4\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)=2$, *podľa vety o limite súčinu*

$\lim_{x\longrightarrow\infty}x^3\left(2-4\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)=\infty$.$\square$

Example 228 *Nájdime* $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+2x-1}{x^4+x^2-3}$.

Solution 229 *Máme* $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+2x-1}{x^4+x^2-3}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^4}\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x}\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}$.
Platí $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x^n}=0$, $n\in\mathbf{N}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=1$, $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)=1\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}=1$,

potom $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x}\frac{\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}=0.1=0$.$\square$

Definition 230 *Ak pre funkciu* $f:A\to\mathbf{R}$, $A\subset\mathbf{R}$, *kde* a *je hromadný bod množiny* A *platí aspoň jeden z nasledujúcich štyroch vzťahov*

$$\lim_{x\longrightarrow a^-}f(x)=\infty,\ \lim_{x\longrightarrow a^+}f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\longrightarrow a^-}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\longrightarrow a^+}f(x)=-\infty,$$

potom priamku $x=a$ *nazývame vertikálnou asymptotou, alebo asymptotou bez smernice ku grafu funkcie* f.

Example 231 *Nájdime všetky vertikálne asymptoty ku grafu funkcie* $f : \boldsymbol{R} \setminus \{-1, 1\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$.

Solution 232 *Ak* $a \neq -1, 1$, *tak* $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a+2}{a^2-1} \in \boldsymbol{R}$. *Pretože platí:*

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} (x+2) = 1 \wedge \lim_{x \longrightarrow -1^-} \left(x^2 - 1\right) = 0 \wedge \left(ak\ x < -1 \Longrightarrow x^2 - 1 > 0\right),$$

tak $\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x+2}{x^2-1} = \infty$, *podobne*

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} (x+2) = 1 \wedge \lim_{x \longrightarrow -1^+} \left(x^2 - 1\right) = 0 \wedge \left(ak\ x > -1 \Longrightarrow x^2 - 1 < 0\right),$$

tak $\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x+2}{x^2-1} = -\infty$, *v bode* $a = 1$ *podobne* $\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x+2}{x^2-1} = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x+2}{x^2-1} = \infty$. *Tak jedinými vertikálnymi asymptotami sú priamky* $x = -1, x = 1$. $\square$

Cvičenia.

1. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$. $[9]$

2. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. $[0]$

3. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. $[6]$

4. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,\ n\in \boldsymbol{N}$.
$$\left[\begin{array}{c} x^k-1=(x-1)\left(x^{k-1}+x^{k-2}+...+x+1\right) \\ \frac{m}{n}\end{array}\right]$$

5. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. $[+\infty]$

6. Vypočítajte limity v bodoch, v ktorých funkcia $f(x)=\frac{1}{|x^2-16|}$ nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf.
$$\left[\begin{array}{c} D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{-4,4\}, \\ \lim_{x\longrightarrow -4^-}\frac{1}{|x^2-16|}=\infty,\ \lim_{x\longrightarrow -4^+}\frac{1}{|x^2-16|}=\infty, \\ \text{nie je zhora ohraničená,} \\ \frac{1}{|x^2-16|}>0, f\ \text{ je zdola ohraničená.}\end{array}\right]$$

7. Vypočítajte limity v bodoch, v ktorých funkcia $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf.
$$\left[\begin{array}{c} D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)=\boldsymbol{R}\setminus\{-2,2\}. \\ \text{Vypočítame limity iba v bode } a=-2. \\ \lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{x}{x^2-4}=\infty,\ \text{v } a=2 \text{ vypoč. sami} \\ \text{odkiaľ plynie, že funkcia nie je zdola ani zhora ohraničená.}\end{array}\right]$$

8. Vypočítajte limity funkcie f v bodoch, v ktorých nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf, ak $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2-9}, & x\in(-3,3) \\ \frac{x^3-16x}{x^2-9}, & x\notin\langle -3,3\rangle\end{cases}$.
$$\left[\begin{array}{c} D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{-3,3\} \\ \lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{x^2}{x^2-9}=-\infty,\ \lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x^3-16x}{x^2-9}=-\infty, \\ \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3-16x}{x^2-9}=\infty\Rightarrow f\ \text{ nie je ohraničená zdola ani zhora}\end{array}\right]$$

9. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

10. Daná je funkcia $f(x)=\frac{x}{|\operatorname{tg} x|}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

    a) Vypočítajte limity v krajných bodoch definičného oboru a v bode 0.

    b) Zistite, či je daná funkcia párna, alebo nepárna.
$$\left[\begin{array}{c} \lim_{x\longrightarrow -\frac{\pi}{2}^+}\frac{x}{|\operatorname{tg} x|}=0,\ \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}^-}\frac{x}{|\operatorname{tg} x|}=0, \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x}{|\operatorname{tg} x|}=1,\ \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x}{|\operatorname{tg} x|}=-1, \\ \text{nepárna}\end{array}\right],$$

11. Vypočítajte limity: $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$, $\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}$. $\left[\frac{1}{6}\sqrt{3},\ \frac{1}{18}\sqrt{3}\right]$

12. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$. $[-1]$

13. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x}-x}$.

$$\left[\begin{array}{c}\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x}-x}=\\ =\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[12]{x}\left(\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{x^{\frac{13}{5}}}-\frac{1}{x^{\frac{28}{5}}}}\right)}{\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x^7}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)}=\infty\end{array}\right]$$

14. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$. $[0]$

15. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

16. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. $[-\infty]$

17. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$. $[\infty]$

18. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}6x}$. $\left[\frac{5}{6}\right]$

19. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. $\left[\begin{array}{c}1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\\ \text{výsledok }\ \frac{1}{2}\end{array}\right]$

20. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. $[e^{-1}]$

21. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$.

$$\left[\begin{array}{c}\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+2}{-6}}\right)^{\frac{3x+2}{-6}\frac{-6}{3x+2}\frac{x+1}{2}}=\\ =\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x+2}{-6}}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-3x-3}{3x+2}}=e^{-1}.\end{array}\right]$$

22. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$. $\left[\frac{1}{a}\right]$

23. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sin x}{x}$.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Platí nerovnica:}\\ -1\le\sin x\le 1\Longrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x},\\ \text{pre }\ x>0,\ \text{potom}\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sin x}{x}=0\end{array}\right]$$

24. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$. $[0]$

25. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$. $[1]$

26. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.
$\left[\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}.\text{ Výsledok je }0\right]$

27. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$

28. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0}x\operatorname{cotg}x$. $[1]$

29. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow -1^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$. $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

30. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$.

$$\left[\begin{array}{r} \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2} \frac{\sqrt{6+x}+2}{\sqrt{6+x}+2} = \\ = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{6+x-4}{x+2} \frac{1}{\sqrt{6+x}+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{6+x}+2} = \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

31. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$. [1]

Spojité funkcie.

Spojitosť funkcie v bode.

Existujú typy funkcií $f : A \rightarrow \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, ktoré majú vlastnosť, že v bodoch „blízkych" ku danému $a \in A$ sa ich hodnoty „málo líšia" od $f(a)$. Podobná vlastnosť sa vyskytovala pri definícii limity funkcie v bode.

Definition 233 *Hovoríme, že funkcia* $f : A \rightarrow \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ *je spojitá v bode* $a \in A$, *ak pre ľubovoľné okolie* $O_\varepsilon(f(a))$ *bodu* $f(a)$ *existuje také* $O_\delta(a)$, *že* $f(O_\delta(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(f(a))$. *Teda* $\forall O_\varepsilon(f(a))\ \exists O_\delta(a)\ ;\ f(O_\delta(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(f(a))$. *Pretože* $a \in \boldsymbol{R}$ *aj* $f(a) \in \boldsymbol{R}$, *možno definíciu spojitosti funkcie v bode sformulovať aj takto:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in A,\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Uvedená definícia sa podobá na definíciu limity funkcie v bode. Rozdiel je v tom, že v definícii spojitosti funkcie v bode nepredpokladáme, že bod $a \in A$ je hromadný bod množiny A. Ak bod $a \in A$ je hromadný bod množiny A, potom z definície spojitosti funkcie v bode ihneď dostávame tvrdenie:

Theorem 234 *(Veta o spojitosti funkcie v bode) Daná je funkcia* $f : A \rightarrow \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$. *Nech* $a \in A$ *je hromadný bod množiny* A. *Potom* f *je spojitá v bode* a *vtedy a len vtedy ak* $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ *existuje a platí* $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Example 235 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \backslash \{-3, 3\} \rightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 9}$. *Zistime, či je* f *spojitá v ľubovoľnom bode* $a \in D(f)$.

Solution 236 $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{-3, 3\}$. *Každý bod* $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-3, 3\}$ *je hromadný bod* $D(f)$. *Nech* $a \neq -3,\ 3$ *je ľubovoľný bod. Dostaneme*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 9} = \frac{a^2 - 2a + 4}{a^2 - 9} = f(a),$$

teda funkcia f *je spojitá v každom bode svojho* $D(f)$. $\square$

Example 237 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. *Zistite, či funkcia* f *je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.*

Solution 238 *Pretože* $1 + x^2 > 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$ *a platí* $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{a^2}{a^2+1} = f(a)$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$ *tak* f *je spojitá v každom bode* $a \in \boldsymbol{R}$, *ktorý je aj hromadným bodom* $D(f)$. $\square$

Poznámka *Ak je funkcia* f *definovaná v bode* $a \in A$, *ktorý nie je hromadným bodom (taký bod nazývame izolovaným bodom) jej definičného oboru (množiny* A *), vtedy môžeme zvoliť* $O_\delta(a)$ *tak, že* $O_\delta(a) \cap A = \{a\}$. *Teda pre každé* $x \in O_\delta(a) \cap A$ *(je to len jediné* x *a to* $x = a$*) platí*

$$f(O_\delta(a) \cap A) = f(a) \in O_\varepsilon(f(a)),$$

pre každé $\varepsilon > 0$. *Teda* f *je v takom bode spojitá.* $\square$

Keď vezmeme do úvahy vetu o spojitosti funkcie v bode, predchádzajúcu poznámku a použijeme vetu o limite absolútnej hodnoty funkcie, limite násobku funkcie číslom, limite súčtu, súčinu a podielu funkcií platí veta:

Theorem 239 *Nech* $f, g : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ *sú funkcie spojité v bode* a, *potom* $|f|$, $f+g$, cf, fg, *a ak* $g(a) \neq 0$, *tak aj* $\frac{f}{g}$ *sú spojité funkcie v bode* a.

Example 240 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x \sin x + 1$. *Ukážte, že* $f(x)$ *je spojitá v každom bode z* $D(f)$.

Solution 241 *Nech* $a \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľné, potom* a *je hromadný bod a podľa vety o limite súčinu a súčtu funkcií máme* $\lim_{x \longrightarrow a} x \sin x + 1 = a \sin a + 1 = f(a)$. $\square$

Theorem 242 *Nech* $g : A \to B$ *je spojitá v bode* $a \in A$, $f : C \to D$, $A, B, C, D \subset \boldsymbol{R}$, $\emptyset \neq H(g) \subset C$ *je spojitá v bode* $g(a)$. *Potom funkcia* $f \circ g$ *je spojitá v bode* a.

Example 243 *Nech* $h : \langle 1, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $h(x) = \sqrt{x-1}$. *Ukážme, že* h *je spojitá v bode* $a = 2$.

Solution 244 *Ak označíme* $g(x) = x - 1$ *a* $f(y) = \sqrt{y}$, *potom* $h = f \circ g$. *Vieme, že* g *je spojitá v bode* $a = 2$ *a* f *je spojitá v bode* $y = 1$. *Tak podľa predchádzajúcej vety* h *je spojitá v bode* $a = 2$. *Podobným spôsobom sa dá ukázať, že funkcia* h *je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.* $\square$

V matematike sa často vyskytujú funkcie, pre ktoré $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ v hromadnom bode a existuje ale hodnota $f(a)$ nie je definovaná. Takto definovanú funkciu možno „dodefinovať" v bode $x = a$ hodnotou $f(a) = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ tak, aby bola spojitá.

Example 245 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. *Dodefinujme funkciu* f *v bode* $x = 0$ *tak, aby bola v tomto bode spojitá.*

Solution 246 *Funkcia* f *nie je definovaná v bode* $x = 0$, *ale tento bod je hromadný bod definičného oboru. Platí* $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. *Keď rozšírime definičný obor na* $\boldsymbol{R}$ *a položíme* $F(0) = 1$, *dostaneme funkciu*

$$F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \textit{pre} \quad x \neq 0 \\ 1 & \textit{pre} \quad x = 0 \end{cases},$$

ktorá je spojitá v každom bode $x \in \boldsymbol{R}$. $\square$

Definition 247 *Funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ *sa nazýva spojitá zľava (sprava) v bode* $a \in A$, *ak* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 ; \forall x \in A,\ a - \delta < x \leq a \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 ; \forall x \in A,\ a \leq x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Theorem 248 *(Veta o spojitosti zľava (sprava) funkcie v bode) Daná je funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$. *Nech* $a \in A$ *je hromadný bod množiny* C^- *aj* C^+. *Potom* f *je spojitá zľava (sprava) v bode* a *vtedy a len vtedy ak* $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x)$ $(\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x))$ *existuje a platí* $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$ $(\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a))$.

Example 249 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pre} \quad x < 0 \\ 1 & \textit{pre} \quad x \geq 0 \end{cases}$. *Zistime, či je táto funkcia spojitá sprava alebo zľava v bode* $x = 0$.

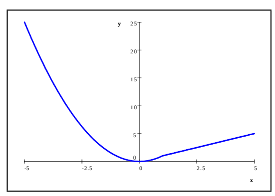
Solution 250 *Bod* $x = 0$ *je hromadný bod definičného oboru* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} 1 = 1 = f(0)$ *,funkcia je v bode* 0 *spojitá sprava* $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} 0 = 0 \neq f(0)$ *,funkcia* f *nie je v bode* 0 *spojitá zľava . V príklade 10 sme ukázali, že* $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ *neexistuje, teda funkcia* f *nie je v bode* 0 *spojitá.* $\square$

Theorem 251 *Funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, *je spojitá v bode* $a \in A$ *vtedy a len vtedy, ak je v bode* a *zľava spojitá aj sprava spojitá.*

Remark 252 *Funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}, A \subset \boldsymbol{R}$ *je podľa predchádzajúcej vety spojitá v bode* $a \in A$, *ktorý je hromadný bod množín* A, C^-, C^+ *vtedy a len vtedy, ak* $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Example 253 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre} \quad x \leq 1 \\ x & \text{pre} \quad x > 1 \end{cases}$ *. Ukážte, že* f *je spojitá v bode* $x = 1$.

Solution 254 *Načrtneme graf funkcie* $f(x)$ *.*



Platí

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} x = 1 = f(1),$$

funkcia je v bode 1 *spojitá sprava*

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} x^2 = 1 = f(1),$$

funkcia f *je v bode* 1 *spojitá zľava. Pretože*

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

funkcia f *je spojitá v bode* $x = 1$. $\square$

Definition 255 *Nech* $M \subset A$ *a funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, *je spojitá v každom bode* $a \in M$. *Potom funkciu* f *nazývame spojitou na množine* M. *Ak* $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, *je spojitá v každom bode* $a \in A$, *tak hovoríme že* f *je spojitá funkcia. Budeme hovoriť, že funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, *je spojitá na intervale* (a, b), $(a, b) \subset A$, *ak je spojitá v každom bode z intervalu* (a, b). *Funkcia je spojitá na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$, *ak je spojitá na* (a, b) *a spojitá zľava v bode* b *a spojitá sprava v bode* a.

Remark 256 *Elementárne funkcie sú spojité.*

Niektoré vlastnosti spojitých funkcií na uzavretom intervale.

Axiom 257 *(Axioma o infime a supreme) Každá neprázdna ohraničená podmnožina množiny reálnych čísel má supremum aj infimum.*

Theorem 258 *(Heine-Borel) Nech C je systém otvorených intervalov, ktorý pokrýva uzavretý interval $\langle a, b\rangle$. Potom existuje konečný podsystém C_0, ktorý tiež pokrýva $\langle a, b\rangle$.*

Theorem 259 *(Veta o ohraničenosti spojitej funkcie na uzavretom intervale) Ak $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia, potom f je na intervale $\langle a, b\rangle$ ohraničená.*

Theorem 260 *(Veta o minime a maxime spojitej funkcie na uzavretom intervale) Nech $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia. Potom f nadobúda na intervale $\langle a, b\rangle$ minimálnu aj maximálnu hodnotu.*

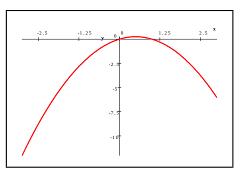
Na ilustráciu vety uvádzame dva príklady:

Example 261 *Nech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x - x^2$. Ukážme, že funkcia f je zhora ohraničená a má maximum v bode $a = \frac{1}{2}$, ale nie je zdola ohraničená.*

Solution 262 *Funkcia f je spojitá na definičnom obore $\boldsymbol{R}$ (teda vetu v tomto príklade nemožno použiť). Platí:*

$$f(x) = x - x^2 = -\left(x^2 - x\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}, tak \max_{x\in\boldsymbol{R}} f(x) = \frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

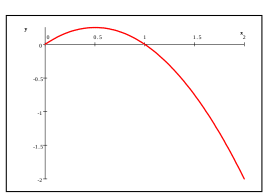
Pretože $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\left(x - x^2\right) = -\infty$ tak funkcia nenadobúda minimum. Tak sme potvrdili, že veta neplatí. Pre lepší prehľad načrtnime graf funkcie $f(x) = x - x^2$



$\square$

Example 263 *Nech $f : \langle 0, 2\rangle \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x - x^2$. Ukážte, že funkcia f je zhora aj zdola ohraničená a má maximum v bode $a = \frac{1}{2}$ a minimum v bode $a = 2$.*

Solution 264 *Podobne ako v predchádzajúcom príklade máme: definičný obor je to uzavretý interval $\langle 0, 2\rangle$ .Platí: $f(x) = x - x^2 = -\left(x^2 - x\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$,tak $\max_{x\in\langle 0,2\rangle} f(x) = \frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right)$.Pretože $0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow \Longrightarrow 0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow -\frac{9}{4} \leq -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Longrightarrow \min_{x\in\langle 0,2\rangle} f(x) = -2 = f(2)$.Pre lepší prehľad načrtnime graf funkcie $f(x) = x - x^2$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$.*



□

> Aj keď vieme, že spojitá funkcia na uzavretom intervale nadobúda svoje minimum aj maximum, veta 260 nám nedáva návod ako tieto extrémy nájsť.

Theorem 265 *(Veta o medzihodnote) Nech* $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* p *je také číslo, že platí* $f(a) \le p \le f(b)$, *alebo* $f(a) \ge p \ge f(b)$. *Potom existuje* $c \in \langle a, b\rangle$ *také, že* $f(c) = p$.

Túto vetu využívame pri hľadaní nulových bodov funkcie ako tzv. metódu bisekcie. Jej podstata je veľmi jednoduchá: daná je spojitá funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$,taká že $f(a) < 0 < f(b)$. Podľa vety o medzihodnote existuje $c \in (a, b)$ také že $f(c) = 0$.

1. Nech d je stred intervalu $\langle a, b\rangle$.
2. Ak platí $f(d) = 0$ našli sme nulový bod.
3. Ak platí $f(d) < 0$, potom vezmeme interval $\langle d, b\rangle$ a vrátime sa na krok 1.
4. Ak platí $f(d) > 0$, potom vezmeme interval $\langle a, d\rangle$ a vrátime sa na krok 1.
5. Takto pokračujeme ďalej, až pokiaľ nezostaneme stáť na kroku 2, alebo pokiaľ absolútna hodnota rozdielu koncových bodov intervalu $\langle a, d\rangle$, alebo $\langle d, b\rangle$ nie je menšia ako nejaké dopredu zadané pevné číslo, ktoré udáva presnosť s akou hľadáme nulový bod.

Theorem 266 *Nech* I *je interval. Nech* $f : I \to \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom* $H(f)$ *je buď jednobodová množina, alebo interval.*

Definition 267 *Nech* $A \subset \boldsymbol{R}$. *Funkciu* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *nazývame rovnomerne spojitou na množine* $M \subset A$, *keď* $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ *také, že* $\forall x, y \in M : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Theorem 268 *Nech* $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom* f *je na* $\langle a, b\rangle$ *rovnomerne spojitá.*

Cvičenia.

1. Zistite, či je funkcia $f(x)=5x^2+2x-6$ spojitá v bode $a=-3,\ 0,\ 1.$ [Je spojitá v bodoch a.]

2. Zistite, či je funkcia $f(x)=|6x+3|$ spojitá v bode $a=-\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{c}\lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^-}|6x+3|=\lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^-}-6x-3=0,\\ \lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^+}|6x+3|=\lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^+}6x+3=0,\\ \lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^-}|6x+3|=\lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^+}|6x+3|=0=f\left(-\frac{1}{2}\right)\\ \text{spojitá v bode }\ a=-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

3. Zistite, či je funkcia $f(x)=\sqrt{3-x^2}$ zľava (sprava) spojitá v bode $a=\sqrt{3}$.

$$\left[\begin{array}{c}D(f)=\left\langle-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\rangle\\ f\left(\sqrt{3}\right)=0,\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^-}\sqrt{3-x^2}=0,\\ f\ \text{ je v bode}\sqrt{3}\text{spojitá zľava,}\\ \lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^+}f(x)\ \text{ nemá zmysel}\end{array}\right]$$

4. Zistite, či je funkcia $f(x)=\frac{1}{4-x}$ spojitá v bodoch $a=-2,\ 0,\ 4.$

$$\left[\begin{array}{c}\text{je spojitá v } a=-2,\ 0,\text{v bode } a=4 \text{ nie je}\\ \text{definovaná (teda tam ani nemôže byť spojitá)}\end{array}\right]$$

5. Zistite, či je funkcia $f(x)=\frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$ spojitá v bodoch $a=-2,\ 0,\ 2.$

$$\left[\begin{array}{c}D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{-2,0,2\},\\ \text{teda v týchto bodoch nie je spojitá}\end{array}\right]$$

6. Zistite, či je funkcia $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ spojitá na intervale $(0,\infty)$.

$$\left[\begin{array}{c}\forall a\in(0,\infty)\Rightarrow\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin a}{a}=f(a),\\ \text{funkcia je spojitá}\end{array}\right]$$

7. Zistite, či je funkcia $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$ spojitá na intervale $\langle1,3)$, alebo na $(1,3\rangle$.

$$\left[\begin{array}{c}f=\frac{h}{g},h:\langle1,\infty)\to\boldsymbol{R},\ h(x)=\sqrt{x-1},\\ g:(-\infty,3)\to\boldsymbol{R},\ g(x)=\sqrt{3-x},\ \ \text{sú spojité, potom}\\ f:\langle1,3)\to,\ f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}\ \text{je podiel dvoch spojitých funkcií, teda je spojitá}\end{array}\right]$$

8. Zistite, či je funkcia f spojitá v bode a a načrtnite jej graf ak:

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & x\in\langle0,1\rangle\\ 4-2x & x\in\left(1,\frac{5}{2}\right)\\ 2x-7 & x\in\left(\frac{5}{2},\infty\right)\end{cases},\ a=1,\ \frac{5}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{v bode } a=1 \text{ je spojitá,}\\ \text{v bode } a=\frac{5}{2} \text{ nie je definovaná ,teda ani spojitá}\end{array}\right]$$

9. Nájdite definičný obor funkcie $f(x)=\frac{(x-1)^2-1}{x-2}$. Ak sa dá nájdite také rozšírenie funkcie f, ktoré označíme F s definičným oborom $\boldsymbol{R}$, aby F bola spojitá! Napíšte predpis získanej spojitej funkcie F.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty), \\ f \text{ je spojitá} \\ \lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x-1)^2 - 1}{x-2} = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2, \\ F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ F(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{pre} & x \neq 2 \\ 2 & \text{pre} & x = 2 \end{array} \right. . \end{array}\right]$$

10. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Ak sa dá nájdite také rozšírenie funkcie f, ktoré označíme F s definičným oborom $\boldsymbol{R}$, aby F bola spojitá! Napíšte predpis získanej spojitej funkcie F. $[D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ .Nedá sa$]$

11. Určte hodnotu parametra p tak, aby funkcia

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 8e^{px} & x < 0 \\ p - 3x & x \geq 0 \end{array} \right. ,$$

bola v bode $a = 0$ spojitá. $[p = 8]$

12. Určte hodnotu parametra p tak, aby funkcia

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} & x \neq 0 \\ p^2 + 2p - 2 & x = 0 \end{array} \right. ,$$

bola v bode $a = 0$ spojitá. $[p = -3 \vee p = 1]$

13. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}$. Ak sa dá nájdite také rozšírenie funkcie f v bode a, aby bola v bode a spojitá. Napíšte predpis získanej spojitej funkcie F , keď $a = 0, -2, -3$.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{-3, -2, 0\},\ \text{je spojitá (podiel)}, \\ \lim_{x \longrightarrow -3} f(x) = -\frac{4}{3}, \lim_{x \longrightarrow -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \longrightarrow 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \\ f \text{ možno dodefinovať iba v bode } x = -3 : \\ F : \boldsymbol{R} \setminus \{-2, 0\} \to \boldsymbol{R}, F(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{pre} & x \in D(f) \\ -\frac{4}{3} & \text{pre} & x = -3 \end{array} \right. . \end{array}\right]$$

14. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{1}{x-3}$ spojitá a ohraničená na intervale $\langle 0, 3)$. $\left[\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty, \text{je spojitá, ale nie je ohraničená}\right]$

15. Zistite, či je funkcia $f(x) = |4x - 8|$ spojitá na intervale $\langle -1, 4\rangle$. Ak áno, nájdite jej minimum a maximum na danom intervale.

$$\left[\begin{array}{c} f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 8 - 4x & \text{pre} & x \in \langle -1, 2) \\ 4x - 8 & \text{pre} & x \in \langle 2, 4\rangle \end{array} \right. ,\ \text{spojitá}, \\ \min_{x \in \langle -1, 4\rangle} f(x) = 0 = f(2), \max_{x \in \langle -1, 4\rangle} f(x) = 12 = f(-1) \end{array}\right]$$

16. Zistite, či je funkcia $f(x) = \sqrt{|x|}$ spojitá na intervale $\langle -3, 2\rangle$. Ak áno, nájdite jej minimum a maximum na danom intervale.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Je spojitá, } \min_{x \in \langle -3, 2\rangle} f(x) = 0, \\ \max_{x \in \langle -3, 2\rangle} f(x) = \sqrt{3}. \end{array}\right]$$

17. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{1}{x^2-6x+8}$ spojitá na intervale $\langle 0,3\rangle$. Ak áno, nájdite jej minimum a maximum na danom intervale.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Funkcia } f \text{ nie je definovaná a teda ani spojitá v bode } a=2, \\ \text{a na intervale } \langle 0,3\rangle \text{ nenadobúda ani maximum} \\ \text{ani minimum. } (\lim_{x\longrightarrow 2^{\pm}} f(x) = \mp\infty)\end{array}\right]$$

18. Použitím vety o medzihodnote ukážte, že funkcia x^3+x+1 má na intervale $\langle -1,1\rangle$ aspoň jeden koreň.

$$\left[\begin{array}{c}\text{Funkcia } f \text{ je spojitá na uzavretom intervale} \\ \text{a platí : } f(-1) = -1 < 0 < f(1) = 3 \\ \text{Podľa vety o medzihodnote pre } p=0 \text{ v intervale } \langle -1,1\rangle \\ \text{existuje aspoň jeden koreň danej rovnice.}\end{array}\right]$$

19. Použitím vety o medzihodnote ukážte, že rovnica $x^3+\frac{1}{x}=3$ má na intervale $\langle 1,3\rangle$ aspoň jedno riešenie.

[Má na danom intervale aspoň jeden koreň.]

20. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ ohraničená a či má minimum a maximum na intervale $\langle 1,\infty)$.

$$\left[\begin{array}{c}f(x) = \frac{1}{x} \text{ je na intervale } \langle 1,\infty) \text{ spojitá aj ohraničená} \\ \max_{x\in\langle 1,\infty)} f(x) = f(1) = 1, \inf_{x\in\langle 1,\infty)} f(x) = 0, \text{nenadobúda minimum}\end{array}\right]$$

Diferencovateľné funkcie.

Derivácia funkcie.

Teraz sa budeme zaoberať deriváciou funkcie a jej použitím. K pojmu derivácie funkcie vedú hlavne nasledujúce typy úloh.

Example 269 *Pozorujeme hmotný bod v časovom intervale I pri jeho pohybe po priamke, ktorá je číselnou osou o_t. Funkcia $f : I \to \mathbf{R}$, ktorá každému $t \in I$ jednoznačne priradí hodnotu $f(t)$ - bod, v ktorom sa nachádza hmotný bod na číselnej osi o_t v okamihu t, popisuje pohyb tohto bodu. Číslo $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ nazývame priemernou rýchlosťou bodu pohybujúceho sa v časovom intervale $\langle t_0, t\rangle$. Číslo $\lim_{t\longrightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0)$ sa nazýva okamžitou rýchlosťou pohybujúceho sa bodu v okamihu t_0.*

Example 270 *V časovom intervale I pozorujeme elektrický náboj pretekajúci prierezom vodiča. Funkcia $f : I \to \mathbf{R}$, ktorá každému $t \in I$ jednoznačne priradí hodnotu $f(t)$ udáva veľkosť elektrického náboja, ktorý pretiekol prierezom vodiča od začiatočného okamihu t_0 po okamih t, popisuje pozorovaný jav. Číslo $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ nazývame priemernou intenzitou elektrického prúdu na časovom intervale$\langle t_0, t\rangle$. Číslo $\lim_{t\longrightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0)$ sa nazýva intenzitou elektrického prúdu v okamihu t_0.*

Example 271 *Nech I je interval a nech $f : I \to \mathbf{R}$. Nech $x_0 \in I$. Číslo $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je smernica sečnice grafu funkcie $f : I \to \mathbf{R}$ prechádzajúcej bodmi $(x, f(x))$, $(x_0, f(x_0))$. Číslo $\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ je smernica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $(x_0, f(x_0))$.*

Predchádzajúce príklady a celý rad iných fyzikálnych a praktických úloh nás vedú k limite:

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

s ktorou sa teraz budeme častejšie stretať a podrobnejšie zaoberať.

Definition 272 *Nech $f : A \to \mathbf{R}$ je definovaná v okolí bodu $a \in A$. Ak existuje vlastná limita*

$$\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$

tak číslo $f'(a)$ nazývame deriváciou funkcie $f : A \to \mathbf{R}$ v bode a a hovoríme, že funkcia f je v bode a diferencovateľná.

Remark 273 *Často budeme namiesto limity z predchádzajúcej definície používať ekvivalentnú definíciu derivácie:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Túto definíciu dostaneme, ak v definícii derivácie položíme $x - a = h$.

Deriváciu funkcie f označujeme: $f\,'$, Df, $\frac{df}{dx}$ (Leibnizovo označenie). My budeme najčastejšie používať prvé označenie.

Example 274 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$. *Nájdite* $f\,'(-2)$, $f\,'(4)$.

Solution 275 *Počítajme limity:* $f\,'(-2) = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{\frac{1}{4}x^2+1-2}{x+2} = \frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = -1$.

$f\,'(4) = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\frac{1}{4}x^2+1-5}{x-4} = \frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = 2.\square$

Example 276 *Nech* I *je otvorený interval,* $k \in \boldsymbol{R}$, $a \in A$ *je ľubovoľný bod. Nech* $f : I \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = k$. *Potom* $f\,'(a) = 0$.

Solution 277 *Nech* $a \in I$ *je ľubovoľný bod.*

$$f\,'(a) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{k-k}{x-a} = 0.$$

Pretože bod a *bol ľubovoľný, tak* $f\,'(a) = 0\,\forall a \in I$. $\square$

Example 278 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$. *Nájdite* $f\,'(a)$.

Solution 279 *Nech* $a \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľný bod, potom* $f\,'(a) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{x-a}{x-a} = 1.\square$

Example 280 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$. *Ukážte, že* $f\,'(a) = 2a$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$.

Solution 281 *Nech* $a \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľný bod, potom* $f\,'(a) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 2a.\square$

Ak pre funkciu $f : A \to \boldsymbol{R}$, $a \in A$ existuje $f\,'(a)$, potom rovnica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $(a, f(a))$ má tvar:

$t : y - f(a) = f\,'(a)(x-a)$, alebo $t : y = f(a) + f\,'(a)(x-a)$,

ak pre funkciu $f : A \to \boldsymbol{R}$, $a \in A$ existuje $f\,'(a) \neq 0$, potom rovnica normály ku grafu funkcie f v bode $(a, f(a))$ má tvar

$n : y - f(a) = -\frac{1}{f\,'(a)}(x-a)$, alebo $y = f(a) - \frac{1}{f\,'(a)}(x-a)$.Normála ku grafu funkcie je priamka kolmá na dotyčnicu ku grafu funkcie v dotykovom bode.

Definition 282 *Nech* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *je definovaná v ľavom (pravom) okolí bodu* $a \in A$. *Ak existuje vlastná limita*

$$\lim_{x\longrightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f\,'_-(a) \quad \left(\lim_{x\longrightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f\,'_+(a)\right),$$

tak číslo $f\,'_-(a)$ $\left(f\,'_+(a)\right)$ *nazývame deriváciou zľava (sprava) funkcie* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *v bode* a. $f\,'_-(a)$, $f\,'_+(a)$ *nazývame jednostrannými deriváciami funkcie* f *v bode* a.

Theorem 283 *Funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *definovaná v okolí bodu* $a \in A$ *má v bode* a *deriváciu* $f\,'(a)$ *práve vtedy, ak má v bode* a *deriváciu zľava* $f\,'_-(a)$ *aj deriváciu sprava* $f\,'_+(a)$ *a platí* $f\,'_-(a) = f\,'_+(a)$. *Potom* $f\,'(a) = f\,'_-(a) = f\,'_+(a)$.

Základné vlastnosti derivácií.

Definition 284 *Nech* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *a* $A_1 \subset A$ *je množina všetkých bodov* $x \in A$*, pre ktoré existuje* $f\,'(x)$*, potom funkciu* $f\,' : A_1 \to \boldsymbol{R}$*,* $x \longmapsto f\,'(x)$ *nazývame deriváciou funkcie* $f : A \to \boldsymbol{R}$*. Ak* $M \subset A_1$*, tak hovoríme, že funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *je diferencovateľná na množine* M*. Ak* $f\,' : A_1 \to \boldsymbol{R}$ *je spojitá na* M *hovoríme, že* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *je spojite diferencovateľná na množine* M*. Ak* $M = A = A_1$*, hovoríme, že funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *je diferencovateľná a ak je* $f\,' : A_1 \to \boldsymbol{R}$ *spojitá hovoríme, že* $f : A \to \boldsymbol{R}$ *je spojite diferencovateľná funkcia.*

Example 285 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{R}$*,* $f(x) = \frac{1}{x}$*. Ukážme, že* $f\,'(x) = -\frac{1}{x^2}$*,* $\forall x \in D(f)$*.*

Solution 286 *Uvažujme* $x \in D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ *ľubovoľné. Potom*

$$f\,'(x) = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{x}}{t - x} = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{(x - t)}{tx(t - x)} = -\lim_{t \longrightarrow x} \frac{(x - t)}{tx(x - t)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Pretože $f\,'(x)$ *je spojitá funkcia, funkcia* f *je spojite diferencovateľná.* □

Example 287 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$*,* $f(x) = \sin x$*. Ukážme, že* $f\,'(x) = \cos x$*,* $\forall x \in \boldsymbol{R}$*.*

Solution 288 *Uvažujme* $x \in \boldsymbol{R}$*, ľubovoľný bod, potom*

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x . \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x.0 + \cos x.1 = \cos x.$$

Pretože $f\,'(x)$ *je spojitá funkcia, funkcia* f *je spojite diferencovateľná.* □

Example 289 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$*,* $f(x) = |x|$ *.Ukážme, že* f *nie je diferencovateľná (ani spojite diferencovateľná) na* $\boldsymbol{R}$*, ale má deriváciu iba pre* $x \neq 0$*, t.j. je diferencovateľná (spojite diferencovateľná) na intervale* $(0, \infty)$ *a na intervale* $(-\infty, 0)$*.*

Solution 290 *Nech* $x > 0$*, potom* $f(x) = x$ *a ak* $t > 0$ *je dostatočne blízko* x *máme*

$$f\,'(x) = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{t - x}{t - x} = 1.$$

To znamená, že pre $x \in (0, \infty)$ *je* $f\,'(x)$ *spojitá funkcia, preto je funkcia* f *spojite diferencovateľná na intervale* $(0, \infty)$ *.*

Nech $x < 0$*, potom* $f(x) = -x$ *a ak* $t < 0$ *je dostatočne blízko* x *máme*

$$f\,'(x) = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{-t - (-x)}{t - x} = -1.$$

To znamená, že pre $x \in (-\infty, 0)$ *je* $f\,'(x)$ *spojitá funkcia, preto je funkcia* f *spojite diferencovateľná na intervale* $(-\infty, 0)$ *. Ukázali sme, že* f *má deriváciu pre* $\forall x \neq 0$*.*

V bode $x=0$ dostávame

$$f\,'_{-}(0)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$f\,'_{+}(0)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

Pretože $f\,'_{-}(0)=-1\neq 1=f\,'_{+}(0)\Longrightarrow f\,'(0)\nexists$, teda funkcia f nemá v bode $x=0$ deriváciu. Aj keď funkcia $f(x)=|x|$ nie je diferencovateľná funkcia, je diferencovateľná (spojite) na intervale $(0,\infty)$ a na intervale $(-\infty,0)$.$\square$

Ak I je otvorený interval, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na I ak je diferencovateľná v každom bode $x\in I$. Ak $I=\langle a,b\rangle$, potom hovoríme, že f je diferencovateľná na $\langle a,b\rangle$ ak je f diferencovateľná na (a,b) a existujú $f\,'_{+}(a)$ a $f\,'_{-}(b)$.

Example 291 *Nech $f:\langle 0,\infty)\to\langle 0,\infty)$, $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$. Ukážme, že f je diferencovateľná na intervale1 $(0,\infty)$, ale nie je diferencovateľná na intervale $\langle 0,\infty)$.*

Solution 292 *Pre $x>0$ máme*
$f\,'(x)=\lim_{t\longrightarrow x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\longrightarrow x}\frac{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{t-x}=\lim_{t\longrightarrow x}\frac{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{\left(t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(t^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}.$

Pre $x=0$ máme $\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}=\infty.$

Pretože limita výrazu $\frac{f(t)-f(0)}{t}$ sprava v bode $x=0$ je rovná ∞, derivácia sprava v bode 0 neexistuje (limita nie je vlastná), ale pre $x>0$ je $f\,'(x)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$, tak f je diferencovateľná na intervale $(0,\infty)$, ale nie je diferencovateľná na intervale $\langle 0,\infty)$.$\square$

Theorem 293 *(Veta o reprezentácii diferencovateľnej funkcie) Nech $f:A\to\boldsymbol{R}$ je diferencovateľná v bode $a\in A$. Potom existuje funkcia $r:A\to\boldsymbol{R}$ taká, že*
a) r je spojitá v bode a,
b) $\lim_{x\longrightarrow a}r(x)=r(a)=0$ a pre každé $x\in A$ je $f(x)-f(a)=f\,'(a)(x-a)+r(x)(x-a)$.

Theorem 294 *(Veta o vzťahu diferencovateľnosti a spojitosti funkcie v bode) Ak je $f:A\to\boldsymbol{R}$ diferencovateľná v bode $a\in A$, potom je v tomto bode spojitá.*

Diferenciál funkcie a pravidlá derivovania.
Ak je $f:A\to\boldsymbol{R}$ diferencovateľná v bode $a\in A$, t.j. platí vzťah

$$f(x)-f(a)=f\,'(a)(x-a)+r(x)(x-a),$$

v ktorom použijeme substitúciu $x=a+h$, dostaneme $f(a+h)-f(a)=f\,'(a)h+r(a+h)h$. Pretože platí $\lim_{h\to 0}r(a+h)=0$, tak máme

$$f(a+h)-f(a)\approx f\,'(a)h.$$

Výraz $f\,'(a)h$ sa nazýva diferenciál funkcie f v bode a a označuje sa df_a. Máme teda $df_a=f\,'(a)h$. Ak $g(x)=x$, tak

$$dg_a=dx_a=g'(a)h=h,\ \forall a\in\boldsymbol{R}.$$

Teda

$$df_a = f\,'(a)dx_a$$

zvyčajne však nepíšeme diferenciál v bode a, ale v bode x, t.j.

$$df_x = df = f\,'(x)dx.$$

Pretože $f(a+h) \approx f(a) + df_a$ vieme aproximovať hodnotu funkcie $f\,(a+h)$ pomocou hodnoty funkcie v bode a t.j. $f\,(a)$ a diferenciálu df_a.

Diferenciál má elegantné vyjadrenie v Leibnitzovom označení:

$$df = \frac{df}{dx}dx.$$

Theorem 295 *(Veta o pravidlách derivovania) Nech $f, g : A \to \boldsymbol{R}$ sú diferencovateľné v bode $a \in A$, nech $c \in \boldsymbol{R}$. Potom*

$$(cf)'\,(a) = cf\,'\,(a)\,,$$

$$(f+g)'\,(a) = f\,'\,(a) + g'\,(a)\,,$$

$$(fg)'\,(a) = f\,'\,(a)\,g\,(a) + f\,(a)\,g'\,(a)\,.$$

Ak $g\,(a) \neq 0$, potom

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f\,'\,(a)\,g\,(a) - f\,(a)\,g'\,(a)}{g^2\,(a)}.$$

Example 296 *Nech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f\,(x) = x\sin x$. Nájdime $f\,'(x)$ pre ľubovoľné $x \in \boldsymbol{R}$.*

Solution 297 *Použijeme vetu o derivácii súčinu dvoch funkcií:*

$$(x\sin x)' = (x)'\sin x + x\,(\sin x)' = \sin x + x\cos x.\,\square$$

Example 298 *Nech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f\,(x) = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Dokážme, že $f\,'(x) = nx^{n-1}$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$.*

Solution 299 $f\,'(x) = (x^n)' = \lim_{t\longrightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t-x} = \lim_{t\longrightarrow x} \frac{(t-x)\left(t^{n-1}+t^{n-2}x+\ldots+tx^{n-2}+x^{n-1}\right)}{t-x} = nx^{n-1}.\,\square$

Example 300 *Ukážme, že $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, pre každé $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.*

Solution 301 *Použitím vety o derivácii podielu dvoch funkcií máme:*

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)'\,x^n - 1\,(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Pre $n = 0$, $f\,(x) = x^0 = 1$ platí $f\,'\,(x) = 0.\,\square$

Remark 302 *Na základe výsledkov predchádzajúcich dvoch príkladov môžeme písať:*

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ \forall n \in \boldsymbol{Z},\ \forall x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}\,.$$

Example 303 *Ukážme, že platí*

$$(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0)' = nc_n x^{n-1} + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + ... + 2c_2 x + c_1.$$

Solution 304 *Použitím vety o derivácii násobku funkcie reálnym číslom a vety o derivácii súčtu dvoch funkcií dostaneme tvrdenie.* □

Example 305 *Nech* $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $h(x) = \frac{5x^6}{x^4+1}$. *Nájdime* $h'(x)$.

Solution 306 *Použitím vety o derivácii podielu dvoch funkcií máme:* $h'(x) = \left(\frac{5x^6}{x^4+1}\right)' = \frac{\left(5x^6\right)'\left(x^4+1\right) - \left(5x^6\right)\left(x^4+1\right)'}{\left(x^4+1\right)^2} = \frac{30x^5\left(x^4+1\right) - \left(5x^6\right)\left(4x^3\right)}{\left(x^4+1\right)^2} = \frac{10x^9+30x^5}{\left(x^4+1\right)^2}$. □

Theorem 307 *(Veta o derivácii zloženej funkcie) Nech* $f : B \to \boldsymbol{R}$, $B \subset \boldsymbol{R}$, $g : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$ *tak, že* $\emptyset \neq H(g) \subset D(f)$ *a zložená funkcia*

$$F = f \circ g : \{x \in A : g(x) \in B\} \to \boldsymbol{R}$$

je definovaná v okolí bodu a. Nech funkcia g je diferencovateľná v bode $a \in A$ *a má deriváciu* $g'(a)$ *a nech funkcia f je diferencovateľná v bode* $b = g(a)$ *a má deriváciu* $f\,'(b)$. *Potom zložená funkcia* $F = f \circ g$ *je diferencovateľná v bode a a má deriváciu*

$$F'(a) = f\,'(g(a))\, g'(a).$$

Remark 308 *Ak sú splnené predpoklady vety o pravidlách derivovania a vety o derivácii zloženej funkcie zvykneme ich zapisovať skrátene bez vypisovania argumentov takto:*

$$(cf)' = cf\,',$$

$$(f+g)' = f\,' + g',$$

$$(fg)' = f\,'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f\,'g - fg'}{g^2},$$

$$(f \circ g)' = (f\,' \circ g)\, g'.$$

Example 309 *Nech* $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,$h(x) = \sin 3x$.*Nájdime* $h'(x)$.

Solution 310 *Nech* $u = g(x) = 3x$, $f(u) = \sin u \Longrightarrow h = f \circ g$. *Potom podľa vety o derivácii zloženej funkcie platí*

$$h'(x) = [f\,'(u)]_{u=3x}\, g'(x) = [\cos u]_{u=3x}\, 3 = 3\cos 3x. \square$$

Example 311 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^4}$. *Nájdime* $f\,'$.

Solution 312 *Podľa vety o derivácii zloženej funkcie máme:* $\left(\sqrt{1+x^4}\right)' = \left((1+x^4)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}(1+x^4)' = \frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\, 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$. □

Derivovanie zloženej funkcie je veľmi jednoduché pri použití Leibnitzovho označenia. Podobne ako vo vete o derivácii zloženej funkcie položme $y = (f \circ g)(x)$ a označme $u = g(x)$, $y = f(u)$, potom $y = f(g(x))$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$, $\frac{dy}{du} = f'(u)$. Tak dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x) = f'(u)\, g'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Example 313 *Ukážme, že $(x^p)' = px^{p-1}$ pre každé $p \in \boldsymbol{Q}$.*

Solution 314 *Tvrdenie sme už ukázali pre $n \in \boldsymbol{N}$. Najskôr priamo z definície ukážeme, že ak $m \in \boldsymbol{N}$, tak pre funkciu $f(x) = x^{\frac{1}{m}}$ platí $f'(x) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$:*

$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{t^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}}}{t-x} = \lim_{t \longrightarrow x} \frac{t^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}}}{\left(t^{\frac{1}{m}}\right)^m - \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m} =$

$= \lim_{t \longrightarrow x} \frac{t^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}}}{\left(t^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}}\right)\left(\left(t^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1} + \left(t^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} x^{\frac{1}{m}} + \ldots + t^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} + \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}\right)} =$

$= \frac{1}{\left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1} + \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} x^{\frac{1}{m}} + \ldots + x^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-2} + \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}\right)} = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}.$

Potom pre ľubovoľné racionálne číslo p v tvare $p = \frac{n}{m}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, platí: $x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$ a aplikáciou vety o derivácii zloženej funkcie dostávame $\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n\right)' = n\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = nx^{\frac{n}{m}-\frac{1}{m}}\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$.$\square$

Niektoré (základné) pravidlá derivovania:

$$(x^a)' = ax^{a-1},\ a \in \boldsymbol{R},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{2}{1-x^2},$$
$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},$$
$$\left(\ln\left|f\left(x\right)\right|\right)' = \frac{f\,'\left(x\right)}{f\left(x\right)}.$$

Derivácie vyšších rádov.

Nech $f: A \to \boldsymbol{R}$. Ak označíme $f = f^{(0)}$, $f\,' = f^{(1)}$, $f\,'' = f^{(2)}, \ldots$ tak môžme uvažovať o funkciách

$f^{(0)}: A \to \boldsymbol{R}$,

$f^{(1)} = \left(f^{(0)}\right)': A_1 \to \boldsymbol{R}$,

$f^{(2)} = \left(f^{(1)}\right)' = \left(f^{(0)}\right)'': A_2 \to \boldsymbol{R}$,

...,

$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)': A_k \to \boldsymbol{R}$, kde A_k je množina všetkých bodov $a \in A$, v ktorých $f^{(k)}(a)$ existuje.

Definition 315 *Funkciu* $f^{(k)}: A_k \to \boldsymbol{R}$, $f^{(k)}\left(x\right) = \left(f^{(k-1)}\right)'\left(x\right)$ *nazývame deriváciou k-teho rádu funkcie* $f: A \to \boldsymbol{R}$. *Ak hodnota* $f^{(k)}\left(a\right)$ *existuje, hovoríme, že funkcia* $f: A \to \boldsymbol{R}$ *je v bode* a k *- krát diferencovateľná. Ak* $M \subset A_k$, *tak hovoríme, že* f *je* k *- krát diferencovateľná na množine* M. *Ak je funkcia* $f^{(k)}: A_k \to \boldsymbol{R}$ *spojitá na množine* M, *hovoríme že* f *je* k *- krát spojite diferencovateľná na množine* M. *Ak* $M = A = A_k$, *hovoríme, že* $f: A \to \boldsymbol{R}$ *je* k *- krát diferencovateľná, resp* k *- krát spojite diferencovateľná funkcia.*

Namiesto $f^{(k)}$ sa tiež používa aj Leibnitzovo označenie $\frac{d^k f}{dx^k}$, alebo označenie $D^k f$.

Example 316 *Nech* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f\left(x\right) = x^5 - 3x^4 + 2x - 1$. *Nájdime derivácie všetkých rádov funkcie* f.

Solution 317 $f\,'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 2$, *platí:* $f\,': \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f\,''(x) = 20x^3 - 36x^2$, *platí:* $f\,'': \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f\,'''(x) = 60x^2 - 72x$, *platí:* $f\,''': \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f^{(4)}(x) = 120x - 72$, *platí:* $f^{(4)}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f^{(5)}(x) = 120$, *platí:* $f^{(5)}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f^{(6)}(x) = 0$, *platí:* $f^{(6)}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, *Je jasné, že platí* $f^{(k)}\left(x\right) = 0$, $f^{(k)}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \forall k > 6$. *Tak sme dostali, že funkcia* f *má derivácie všetkých rádov, ktoré majú definičné obory* $A = A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_k = \ldots$ $\square$

Example 318 *Nech* $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, g\left(x\right) = \sin x$. *Nájdime derivácie všetkých rádov funkcie* g.

Solution 319 *Platí:*

$$g'\left(x\right) = \cos x, g''\left(x\right) = \left(\cos x\right)' = -\sin x, g'''\left(x\right) = \left(-\sin x\right)' = -\cos x,$$
$$g^{(4)}\left(x\right) = \sin x, g^{(5)}\left(x\right) = \cos x, g^{(6)}\left(x\right) = -\sin x.$$

Pozorný čitateľ si iste všimol, že po každých štyroch deriváciách sa výsledky opakujú. Derivácie funkcie sin *môžeme zapísať prehľadne takto:*

$$\left(\sin x\right)^{(n)} = \begin{cases} \left(-1\right)^k \sin x, & n = 2k,\ k = 1, 2, \ldots \\ \left(-1\right)^k \cos x, & n = 2k+1,\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \quad \square$$

Cvičenia.

1. Vypočítajte derivácie funkcií: $f_1(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)}$, $f_2(x) = 4^{3x}$, $f_3(x) = \ln\frac{5+4x}{3+7x}$, $f_4(x) = x10^{-x}$, $f_5(x) = \ln\sin 2x$.

$$\left[\begin{array}{c} f_1'(x) = \frac{\cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{3\sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)}}, f_2'(x) = 3.\ln 4.4^{3x}, f_3'(x) = -\frac{23}{(3+7x)(5+4x)}, \\ f_4'(x) = 10^{-x}(1 - x\ln 10), f_5'(x) = 2\operatorname{cotg} 2x. \end{array}\right]$$

2. Vypočítajte derivácie funkcií: $f_1(x) = \arcsin\sqrt{x}$, $f_2(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $f_3(x) = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$, $f_4(x) = x^x$, $f_5(x) = x^{\sin x}$.

$$\left[\begin{array}{c} f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}, f_2'(x) = \arcsin x, f_3'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}, \\ f_4'(x) = x^x(1+\ln x), f_5'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right). \end{array}\right]$$

3. Zistite, či je funkcia $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, diferencovateľná v bodoch $a = 0,\ \frac{2}{\pi}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{V bode } a = 0 \text{ platí: } \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0}\sin\frac{1}{x}\nexists. \\ \text{V bode } a = \frac{2}{\pi} \text{ nemusíme deriváciu počítať z definície, ale stačí pre} \\ x \neq 0 \text{ nájsť}: f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},\ f'\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1. \end{array}\right]$$

4. Zistite, či je funkcia $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, v bode $a = 0$ a) spojitá, b) diferencovateľná.

$$\left[\begin{array}{c} \text{a) je spojitá v bode } a = 0, \\ \text{b) nie je diferencovateľná v bode } a = 0. \end{array}\right]$$

5. Pre funkciu $f(x) = |2x - 6|$ nájdite f'. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a f'.

$$\left[\begin{array}{c} f(x) = |2x-6| = \begin{cases} 6-2x & \text{pre} \quad x < 3 \\ 2x-6 & \text{pre} \quad x \geq 3 \end{cases}, \\ f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{pre} \quad x < 3 \\ 2 & \text{pre} \quad x > 3 \end{cases}, \\ \left.\begin{array}{l} f_+'(3) = \lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{2x-6}{x-3} = 2 \\ f_-'(3) = \lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{6-2x}{x-3} = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(3)\nexists. \end{array}\right]$$

6. Pre funkciu $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ nájdite f'. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a f'. $\left[f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{pre} \quad x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{pre} \quad x > 1 \end{cases}, f'(1)\nexists. \right]$

7. Pre funkciu $f(x) = |x^2 - x - 2|$ nájdite f'. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a f'. $\left[\begin{array}{c} f'(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{pre} \quad x \in (-1,2) \\ 2x-1 & \text{pre} \quad x \notin \langle -1, 2\rangle \end{cases}, \\ f'(-1), f'(2)\nexists. \end{array}\right]$

8. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bode $A = (0, ?)$.

   $[A = (0,1),\ t : x + y - 1 = 0,\ n : x - y + 1 = 0]$

9. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{1-x^2}$ v priesečníku s priamkou $y = 1$.

   $$\left[\begin{array}{c}\text{Úloha má dve riešenia:}\\ \text{v bode } T_1 = (1,1):\ t_1 : 2x + y - 3 = 0,\ n_1 : x - 2y + 1 = 0,\\ \text{v bode } T_2 = (-1,1):\ t_2 : 2x - y + 3 = 0,\ n_2 : x + 2y - 1 = 0.\end{array}\right]$$

10. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ v bode $A = (0, ?)$. $[A = (0,0),\ t : x - y = 0,\ n : x + y = 0]$

11. Načrtnite graf funkcie $f(x) = \arccos 3x$ a nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f v jeho priesečníku s osou o_y. $\left[t : 3x + y - \frac{\pi}{2} = 0,\ n : x - 3y + \frac{3\pi}{2} = 0.\right]$

12. Ku grafu funkcie $f(x) = x \ln x$ nájdite rovnicu normály, ktorá je rovnobežná s priamkou $p : 2x - 2y + 3 = 0$. $[n : y - x + 3e^{-2} = 0.]$

13. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú grafy funkcií $f(x) = \ln x$ a $g(x) = \ln^2 x$.

   $$\left[\begin{array}{c}\text{Návod: najskôr určte priesečník funkcií } f \text{ a } g,\\ \text{potom použite vzťah } tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|,\\ \text{kde } k_1, k_2 \text{ sú smernice dotyčníc ku grafom funkcie } f \text{ resp. } g \text{ v ich priesečníku.}\\ \text{Výsledok: } \varphi_1 = \frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{e}{e^2+2}.\end{array}\right]$$

14. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú grafy funkcií $f : \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \sin x$ a $g : \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = \cos x$. $\left[\varphi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}.\right]$

15. V indukčnej cievke preteká prúd i, pre ktorý platí $i = 15 \sin^5 3t$, kde prúd i je daný v ampéroch a čas t v sekundách. Vypočítajte indukované elektromotorické napätie $e_i = -L\frac{di}{dt}$ v čase $t = \frac{2\pi}{9}$ s, ak $L = 0{,}03\,\mathrm{H}$. $[1{,}9\,\mathrm{V}]$

Priebeh funkcie.

Lokálne extrémy funkcií.

Definition 320 *Nech $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, $c \in A$. Ak existuje také $O_\delta^\circ(c)$, že $\forall x \in O_\delta^\circ(c) \cap A$ je*

a) $f(x) \le f(c)$ $(f(x) < f(c))$ hovoríme, že $f : A \to \boldsymbol{R}$ má v bode c (ostré) lokálne maximum a hodnotu $f(c)$ nazývame (ostré) lokálne maximum funkcie f.

b) $f(x) \ge f(c)$ $(f(x) > f(c))$ hovoríme, že $f : A \to \boldsymbol{R}$ má v bode c (ostré) lokálne minimum a hodnotu $f(c)$ nazývame (ostré) lokálne minimum funkcie f. V každom z predchádzajúcich prípadov hovoríme, že $f : A \to \boldsymbol{R}$ má v bode c lokálny extrém.

c) Ak $\forall x \in A$ $(f(x) < f(c))$ $f(x) \le f(c)$ hovoríme, že $f : A \to \boldsymbol{R}$ má v bode c (ostré) maximum a hodnotu $f(c)$ nazývame (ostré) maximum funkcie f,

d) Ak $\forall x \in A$ $(f(x) > f(c))$ $f(x) \ge f(c)$ hovoríme, že $f : A \to \boldsymbol{R}$ má v bode c (ostré) minimum a hodnotu $f(c)$ nazývame (ostré) minimum funkcie f.

Remark 321 *Ak funkcia $f : A \to \boldsymbol{R}$ má v bode c maximum (minimum), tak má v bode c aj lokálne maximum (lokálne minimum).*

Veta o minime a maxime spojitej funkcie na uzavretom intervale hovorí o existencii maxima a minima spojitej funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$, ale nehovorí nič o tom ako túto hodnotu nájsť.

Theorem 322 *(Nutná podmienka existencie extrému funkcie) Nech $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$. Ak funkcia f má v bode $c \in (a, b)$ lokálny extrém a je v bode c diferencovateľná, tak $f'(c) = 0$.*

Remark 323 *Predchádzajúca veta implikuje, že jediné body v $\langle a, b\rangle$, v ktorých spojitá funkcia $f : \langle a, b\rangle \to R$ môže nadobúdať extrém sú:*

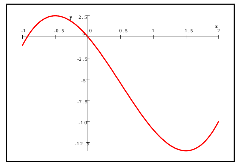
- koncové body intervalu $\langle a, b\rangle$,
- body $c \in (a, b)$, pre ktoré je $f'(c) = 0$,
- body $c \in (a, b)$, v ktorých f nie je diferencovateľná.

Definition 324 *Bod, v ktorom má funkcia deriváciu prvého rádu rovnú nule nazývame stacionárny bod.*

> Keď hľadáme maximum, alebo minimum funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ stačí, ak vyšetríme hodnoty vo všetkých stacionárnych bodoch a v tých bodoch z intervalu (a, b), v ktorých derivácia neexistuje a napokon v koncových bodoch a, b. Najväčšia z týchto hodnôt je maximum a najmenšia minimum funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Example 325 *Nech $f : \langle -1, 2\rangle \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$. Nájdime extrémy funkcie f.*

Solution 326 *Ako pomôcku pre názornosť načrtnime približne graf funkcie $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$ pre $x \in \langle -1, 2\rangle$.*

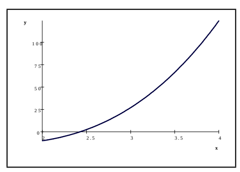


$f\,'(x) = 12x^2 - 12x - 9 = 3(2x+1)(2x-3)$. Odtiaľ $f\,'(x) = 0$ v stacionárnych bodoch $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$. Tak funkcie f môže mať extrémy iba v bodoch $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$. Pretože $f(-1) = -1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{2}$, $f(2) = -10$, tak $\min_{\langle -1,2\rangle} f(x) = -\frac{27}{2} = f\left(\frac{3}{2}\right)$, $\max_{\langle -1,2\rangle} f(x) = \frac{5}{2} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$. $\square$

Remark 327 *Vo všeobecnom prípade, keď hľadáme extrémy nejakej funkcie nie je približný náčrt grafu funkcie súčasťou riešenia príkladu. Grafy príslušných funkcií uvádzame v tejto časti iba pre názornosť, aby si čitateľ uvedomil aj geometrickú interpretáciu extrému.*

Example 328 *Nech $f : \langle 2,4\rangle \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$. Nájdime extrémy funkcie f.*

Example 329 *Ako pomôcku pre názornosť načrtnime približne graf funkcie $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$ pre $x \in \langle 2,4\rangle$.*

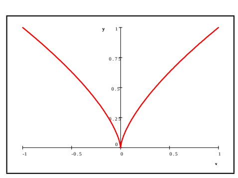


Z predchádzajúceho príkladu vieme, že pre $\forall x \in (2,4)$ je $f\,'(x) \neq 0$. Teda extrémy funkcie môžu byť len v koncových bodoch: $x = 2$, $x = 4$. Tak $\min_{\langle 2,4\rangle} f(x) = -10 = f(2)$, $\max_{\langle 2,4\rangle} f(x) = 124 = f(4)$. $\square$

Môže sa stať, že funkcia f má extrém v bode c, v ktorom $f\,'(c)$ neexistuje.

Example 330 *Nech $f : \langle -1,1\rangle \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Ukážme, že $f\,'(0) \nexists$, napriek tomu má funkcia f v bode $x = 0$ extrém, nájdite aj iné extrémy ak existujú.*

Solution 331 *Ako pomôcku pre názornosť načrtnime približne graf funkcie $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pre $x \in \langle -1,1\rangle$.*



Funkcia f je spojitá. Ukážeme, že $f\,'(0) \nexists$. Derivácia funkcie f v bode $x = 0$ neexistuje, pretože ak by existovala, potom by nasledujúca limita musela byť vlastnou:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \begin{cases} -\infty, & \text{pre} \quad x < 0 \\ \infty, & \text{pre} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f\,'(0) \nexists.$$

Deriváciu funkcie f *v bodoch* $x \neq 0$ *vypočítame ľahko podľa pravidiel derivovania:* $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. *Pretože* $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$ *a* $f(0) = 0$. *Funkcia* f *má extrém v bode* $x = 0$. *Ďalšími kandidátmi na extrém sú koncové body intervalu. Pretože* $f(-1) = f(1) = 1$, *tak dostávame:*

$$\min_{\langle -1,1 \rangle} f(x) = 0 = f(0), \max_{\langle -1,1 \rangle} f(x) = 1 = f(-1) = f(1). \square$$

Example 332 *Farmár chce použiť* 2 km *elektrického drôtu na ohradenie obdĺžnikového pasienka s maximálnou plochou. Aké budú rozmery tohto pasienka?*

Solution 333 *Problém sformulujeme ako úlohu na hľadanie extrému spojitej funkcie na uzavretom intervale. Nech* x, y *sú rozmery pasienka. Platí:* $2(x + y) = 2 \Longrightarrow y = 1 - x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. *Označme plošný obsah pasienka* $P = xy$. *Potom plochu pasienka môžeme vyjadriť ako funkciu jednej premennej* $P(x) = x(1 - x)$. *Hľadáme teda extrém funkcie* $P : \langle 0, 1 \rangle \to \boldsymbol{R}$, $P(x) = x - x^2$. *Platí* $P'(x) = 1 - 2x$. *Stacionárny bod je bod* $x = \frac{1}{2}$. *Vieme, že* P *môže mať na intervale* $\langle 0, 1 \rangle$ *extrémy iba v bodoch* $x = 0, \frac{1}{2}, 1$. *Máme* $P(0) = 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $P(1) = 0$. *Tak*

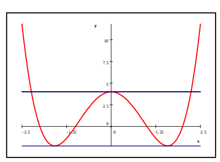
$$\max_{\langle 0,1 \rangle} P(x) = \frac{1}{4} = P\left(\frac{1}{2}\right).$$

Teda $y = 1 - x = \frac{1}{2}$ *a pasienok s maximálnou plochou, ktorý možno ohradiť* 2 km *drôtu je štvorcový pasienok s dĺžkou strany* $\frac{1}{2}$ km. $\square$

Vlastnosti diferencovateľných funkcií.

Theorem 334 *(Rolleho veta) Nech* $f : \langle a, b \rangle \to \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* f *je diferencovateľná na* (a, b) *a nech* $f(a) = f(b)$. *Potom existuje číslo* $c \in (a, b)$, *také že* $f'(c) = 0$.

Geometrický význam Rolleho vety: $f : \langle -2, 3 \rangle \to \boldsymbol{R}$, spojitá, diferencovateľná na $(-2, 3)$, $f(-2) = f(3)$, potom existuje $c \in (-2, 3)$, také že $f'(c) = 0$. Body c_1, c_2, c_3 sú vyznačené červeným štvorčekom na osi o_x.$x^4 - 5x^2 + 4$



Example 335 *Preverme platnosť Rolleho vety pre funkciu* $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ *na intervale* $\langle -1, 2 \rangle$.

Solution 336 *Funkcia* f *je spojitá na intervale* $\langle -1, 2 \rangle$ *jej derivácia je* $f'(x) = 3x^2 + 8x - 7$. *Derivácia existuje* $\forall x \in \boldsymbol{R}$, *čo znamená, že* f *je diferencovateľná na* $(-1, 2)$. *Platí* $f(-1) = 0 = f(2)$. *Predpoklady Rolleho vety sú splnené, teda existuje číslo* $c \in (-1, 2)$, *také že* $f'(c) = 0$. *Nájdeme toto číslo: číslo* c *spĺňa rovnicu* $3x^2 + 8x - 7 = 0 \Longrightarrow c_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+84}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{37}}{3}$. *Ľahko vidieť, že hľadané* $c = \frac{-4+\sqrt{37}}{3} \in (-1, 2)$. $\square$

Theorem 337 *(Cauchyho veta) Nech $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$, $g : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ sú spojité funkcie. Nech f, g sú diferencovateľné na (a, b) a $g'(x) \neq 0$ pre každé $x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Example 338 *5 Zistime, či Cauchyho veta platí pre funkcie $f(x) = x^3$ a $g(x) = x^2 + 1$ na intervale $\langle 1, 2\rangle$.*

Solution 339 *Funkcie f, g sú spojité na intervale $\langle 1, 2\rangle$ ich derivácie sú $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$. Derivácie existujú $\forall x \in \boldsymbol{R}$, čo znamená, že f a g sú diferencovateľné na $(1, 2)$ a $g'(x) \neq 0$ pre každé $x \in (1, 2)$. Predpoklady Cauchyho vety sú splnené, teda existuje číslo $c \in (1, 2)$, také že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{8 - 1}{5 - 2} = \frac{7}{3}.$$

Nájdeme číslo c spĺňa rovnicu $\frac{3c^2}{2c} = \frac{7}{3} \Longrightarrow c = \frac{14}{9} \in (1, 2)$.$\square$

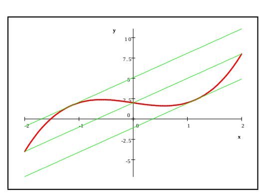
Theorem 340 *(Lagrangeova veta) Nech $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia, diferencovateľná na (a, b). Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \ (f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)).$$

Remark 341 *Nech platia predpoklady Lagrangeovej vety. Potom ak v jej tvrdení navzájom zameníme a a b, tvrdenie zostane v platnosti, t.j. existuje také $c \in (a, b)$, že*

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \ (f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)).$$

Geometrický význam Lagrangeovej vety: $f : \langle -2, 2\rangle \to \boldsymbol{R}$, spojitá, diferencovateľná na $(-2, 2)$, potom existuje $c \in (-2, 2)$, také že $f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$, teda dotyčnica ku grafu funkcie v bode $(c, f(c))$ je rovnobežná so sečnicou, prechádzajúcou bodmi $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$. Body c_1, c_2 sú vyznačené červeným štvorčekom na osi o_x.



Example 342 *Pomocou Lagrangeovej vety dokážme nerovnicu: $\frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$ pre $0 < a \leq b$.*

Solution 343 *Uvažujme funkciu* $f : \langle a,b\rangle \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \ln x$. *Pre* $0 < a \leq b$ *je funkcia na* $\langle a,b\rangle$ *spojitá* $f'(x) = \frac{1}{x}$ *a diferencovateľná na* (a,b). *Predpoklady Lagrangeovej vety sú splnené, teda existuje* $c \in (a,b)$ *také, že* $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, *t.j.* $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$ *alebo*

$$\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{c}(b-a).$$

Potom pretože $0 < a \leq c \leq b$ *dostávame:* $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a}$, *odkiaľ plynie:*

$$\frac{b-a}{b} \leq \frac{b-a}{c} = \ln\frac{b}{a} = \frac{b-a}{c} \leq \frac{b-a}{a}.\square$$

Theorem 344 *(Dôsledok Lagrangeovej vety)*

a) Nech $f : \langle a,b\rangle \to \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Ak* $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, *potom* $f(x) = const$ *na* $\langle a,b\rangle$.

b) Nech $f, g : \langle a,b\rangle \to \boldsymbol{R}$ *sú spojité funkcie. Ak* $f'(x) = g'(x), \forall x \in (a,b)$, *potom* $f - g = const$ *na* $\langle a,b\rangle$.

Example 345 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *je taká, že* $f(0) = 3$ *a* $f'(x) = 5$ *pre každé* $x \in \boldsymbol{R}$. *Ukážme, že* $f(x) = 5x + 3$.

Solution 346 *Ak* $g(x) = 5x$, *potom* $g'(x) = 5$ *a teda* $f'(x) = g'(x), \forall x \in \boldsymbol{R}$. *Podľa dôsledku Lagrangeovej vety b) je* $f - g = const$ *na každom uzavretom intervale obsahujúcom* 0 *a* x. *Teda* $f(x) - g(x) = f(0) - g(0) = 3 - 0 = 3$, *to znamená* $f(x) = g(x) + 3 = 5x + 3.\square$

Taylorova veta.

Predpokladajme, že by sme chceli aproximovať hodnotu funkcie $f(x)$ v blízkosti bodu a a poznáme hodnotu $f(a)$. Aproximáciu už dokážeme urobiť pomocou diferenciálu (t.j. znalosti hodnoty $f'(a)$). Ak však chceme ešte presnejšiu aproximáciu je potrebné namiesto aproximácie lineárnou funkciou hodnotu $f(x)$ aproximovať polynómom.

Theorem 347 *(Taylorova veta) Nech* $f : \langle a,b\rangle \to \boldsymbol{R}$ *je n-krát spojite diferencovateľná funkcia. Nech* f *je (n+1)-krát diferencovateľná na otvorenom intervale* (a,b). *Potom existuje* $c \in (a,b)$ *také, že*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Remark 348 *a) Taylorova veta je často prezentovaná v tvare, keď namiesto* b *píšeme* x *a namiesto* a *píšeme* x_0.

b) Taylorovu vetu používame hlavne v prípade, keď $f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \boldsymbol{R}$ *je spojitá na* $O_\delta^\circ(x_0)$. *Potom* $\forall x \in O_\delta^\circ(x_0)$ *máme*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde $c \in O_\delta^\circ(x_0)$ *závisí nielenod* x, x_0 *ale aj od* $n \in \boldsymbol{N}$.

c) Polynóm

$$T_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ T_n(x) = f(x_0) + f\,'(x_0)(x-x_0) + \frac{f\,''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazývame n-tý Taylorov polynóm funkcie $f : \langle a,b\rangle \to \boldsymbol{R}$ *v bode* x_0 *a*

$$r_n : O_\delta^\circ(x_0) \to \boldsymbol{R},\ r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

nazývame zvyšok po n-tom Taylorovom polynóme funkcie (Lagrangeov tvar zvyšku) $f : \langle a,b\rangle \to \boldsymbol{R}$ *v bode* x_0*.*

Example 349 *Aproximujme hodnotu* $\sin\frac{7\pi}{36}$ *s chybou menšou ako* $0,00001$*.*

Solution 350 *Nech* $f(x) = \sin x$*,* $x = \frac{7\pi}{36}$*,* $x_0 = 0$*. Vieme, že* $\forall c$ *a* $\forall n$ *platí* $\left|f^{(n+1)}(c)\right| = |\sin c| \le 1$*, alebo* $\left|f^{(n+1)}(c)\right| = |\cos c| \le 1$ *potom máme odhad pre*

$$R_n\left(\frac{7\pi}{36}\right) : \left|r_n\left(\frac{7\pi}{36}\right)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|\left|\frac{7\pi}{36}\right|^{n+1} \le \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{7\pi}{36}\right)^{n+1}.$$

Má platiť $\left|r_n\left(\frac{7\pi}{36}\right)\right| \le 0,00001$*. Táto nerovnica je splnená pre* $n \ge 6$*, teda*

$$\sin\frac{7\pi}{36} \approx T_6\left(\frac{7\pi}{36}\right) = \left(\frac{7\pi}{36}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{7\pi}{36}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{7\pi}{36}\right)^5 = 0,573583.\square$$

L' Hospitalovo pravidlo.

Dokázali sme vetu: Nech $f, g : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, a je hromadný bod množiny A,

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L,\ \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = M \ne 0,\ g(x) \ne 0,\ \forall x \in A.$$

Potom

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\longrightarrow a} f(x)}{\lim_{x\longrightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Vo viacerých prípadoch pri výpočte limity podielu funkcií $\frac{f}{g}$ dostaneme, že $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x\longrightarrow a} g(x) = 0$. Napríklad

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{x} = 1,\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

ale dosiaľ nemáme efektívnu metódu ako limity tohto typu počítať.

Theorem 351 *(L' Hospitalovo pravidlo) Nech* $f : \langle a,b) \to \boldsymbol{R}$ *a* $g : \langle a,b) \to \boldsymbol{R}$*,* $a < b \le \infty$ *sú diferencovateľné funkcie. Nech pre každé* $x \in \langle a,b)$ *je* $g(x) \ne 0$ *a* $g'(x) \ne 0$*. Nech* $\lim_{x\longrightarrow b} f(x) = \lim_{x\longrightarrow b} g(x) = 0$*. Ak existuje (vlastná alebo nevlastná)*

$$\lim_{x\longrightarrow b}\frac{f\,'(x)}{g'(x)} = L,$$

potom

$$\lim_{x\longrightarrow b}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Remark 352 *L' Hospitalovo pravidlo platí za tých istých predpokladov, keď podmienku*

$$\lim_{x\longrightarrow b} f(x) = \lim_{x\longrightarrow b} g(x) = 0$$

zameníme za podmienku

$$\lim_{x\longrightarrow b} f(x) = \lim_{x\longrightarrow b} g(x) = \infty.$$

Dôkaz je však komplikovanejší a nebudeme ho robiť. Analogická veta platí pre výpočet limity v ľavom koncovom bode definičného oboru.

Example 353 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Example 354 *Platí* $\lim_{x\longrightarrow 2}(x^2-5x+6) = 0$ *a* $\lim_{x\longrightarrow 2}(x^2-3x+2) = 0$ *a aj ďalšie predpoklady L' Hospitalovho pravidla sú splnené, máme*

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{2x-5}{2x-3} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Treba si uvedomiť, že L' Hospitalovo pravidlo sme použili na výpočet limity v bode 2 zľava. Analogickú vetu by sme použili na výpočet limity v bode 2 sprava. Pretože sa tieto limity rovnajú, tak sú rovné limite v bode 2. $\square$

Example 355 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$.

Solution 356 *Predpoklady L' Hospitalovho pravidla sú splnené, máme*

$$\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.\square$$

Remark 357 *L' Hospitalovo pravidlo sa používa pri výpočte limít „typu"* $\frac{0}{0}$, *alebo „typu"* $\frac{\infty}{\infty}$. *Na tieto typy limít možno vhodnými úpravami previesť limity*

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x)\, g(x)\,, \ \lim_{x\longrightarrow a} [f(x) - g(x)]\,, \ \lim_{x\longrightarrow a} f(x)^{g(x)}\,,$$

ktoré vedú k limitám „typu" $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

Example 358 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

Solution 359 *Predpoklady L' Hospitalovho pravidla sú splnené, daná limita je „typu"* $\frac{\infty}{\infty}$, *aplikujeme L' Hospitalovo pravidlo n-krát a dostaneme*

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.\square$$

Example 360 *Vypočítajme* $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Solution 361 *Predpoklady L' Hospitalovho pravidla nie sú splnené, pretože daná limita je „typu"* 1^∞. *Keď funkciu* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *použitím vzťahu* $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ *(ktorý uvádzame bez predpokladov) upravíme na tvar* $e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, *potom v exponente máme limitu „typu"* $\infty.0$, *ktorú upravíme na limitu „typu"* $\frac{0}{0}$ *takto:*

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 1,$$

potom

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\longrightarrow\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\longrightarrow\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e.\square$$

Monotónne funkcie.
Budeme sa zaoberať vzťahom medzi diferencovateľnosťou funkcie a monotónnosťou funkcie.

Theorem 362 *(Veta o existencii inverznej funkcie) Každá rýdzomonotónna funkcia má inverznú funkciu.*

Theorem 363 *Nech I je interval a $f : I \to B$, $B \subset \boldsymbol{R}$ je spojitá bijekcia. Potom $f : I \to B$ je rýdzomonotónna funkcia.*

Remark 364 *Nech I je interval. Hovoríme, že $x \in I$ je vnútorný bod intervalu I, keď existuje také okolie $O_\delta(x)$, že $O_\delta(x) \subset I$. Množinu všetkých vnútorných bodov intervalu I nazývame vnútrom intervalu I.*

Theorem 365 *(Veta o spojitosti inverznej funkcie) Nech I je interval a $f : I \to B$ je spojitá bijekcia. Potom funkcia $f^{-1} : B \to I$ je spojitá.*

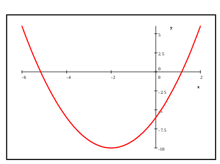
Theorem 366 *(Nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie) Nech I je interval a $f : I \to \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia. Nech je f diferencovateľná vnútri intervalu I. Potom f je neklesajúca (nerastúca) na intervale I vtedy a len vtedy, keď $f'(x) \geq 0$, $(f'(x) \leq 0)$ vnútri intervalu I. Naviac f je rastúca (klesajúca) na I vtedy a len vtedy, keď $f'(x) \geq 0$, $(f'(x) \leq 0)$ a $f'(x) \not\equiv 0$ (funkcia f nie je identicky rovná nule) na žiadnom otvorenom podintervale intervalu I.*

Example 367 *Nech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$. Nájdime intervaly, na ktorých je f monotónna.*

Solution 368 *$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0$, teda $f'(x) > 0$ pre $x \neq -1$. Teda podľa vety o monotónnosti funkcie $f(x)$ je rastúca na $(-\infty, \infty) = \boldsymbol{R}$.* $\square$

Example 369 *Nech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 6$. Nájdime intervaly, na ktorých je f monotónna.*

Solution 370 *$f'(x) = 2x + 4$ tak $f'(x) > 0$ pre $x > -2$ a $f'(x) < 0$ pre $x < -2$, teda f je klesajúca na intervale $(-\infty, -2)$ a rastúca na $(-2, \infty)$. Je jasné, že v bode $x = -2$ má f ostré lokálne minimum $f(-2) = -10 = \min_{\boldsymbol{R}} f(x)$, ktoré je v tomto prípade aj minimom*



$\square$

Vetu o existencii inverznej funkcie spolu s vetou o monotónnosti funkcie môžeme „inteligentne" použiť pri aplikáciách vety o existencii inverznej funkcie. Tak napríklad pre nasledujúce funkcie máme:

$$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = 3x - 2,\ f'(x) = 3 > 0$$

je rastúca (rýdzomonotónna), teda má inverznú funkciu

$$f^{-1}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}.$$

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f(x)=1-2x^3,\ f'(x)=-6x^2<0$$

je klesajúca teda má inverznú funkciu

$$f^{-1}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x}{2}}.$$

$$f:\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle\to\langle-1,1\rangle,\ f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x>0$$

je rastúca teda má inverznú funkciu

$$f^{-1}:\langle-1,1\rangle\to\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle,\ f^{-1}(x)=\arcsin x.$$

Theorem 371 *(Veta o derivácii inverznej funkcie) Nech $f:I\to\boldsymbol{R}$ je spojitá na otvorenom intervale I a nech $a\in I$. Predpokladajme, že f má inverznú funkciu a $f'(a)$ existuje, pritom $f'(a)\neq 0$, $f(a)=c$. Potom $(f^{-1})'(c)$ existuje a platí $(f^{-1})'(c)=\frac{1}{f'(a)}$.*

Test prvou deriváciou.

Nech $f:A\to\boldsymbol{R}, c\in A$ je diferencovateľná na $O_\delta^\circ(c)\subset A_1$, kde $f':A_1\to\boldsymbol{R}$. Hovoríme, že

f' mení v bode c znamienko z kladného na záporné, ak pre každé $x_1,x_2\in O_\delta^\circ(c)$, $x_1<c<x_2$ platí $f'(x_1)>0$, $f'(x_2)<0$ a

f' mení v bode c znamienko zo záporného na kladné, ak pre každé $x_1,x_2\in O_\delta^\circ(c)$, $x_1<c<x_2$ platí $f'(x_1)<0$, $f'(x_2)>0$.

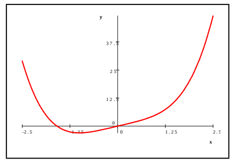
Veta *(Test prvou deriváciou) Nech $f:I\to\boldsymbol{R}$ je spojitá na intervale I a nech $c\in I$ je vnútorný bod intervalu I.*

a) Ak f' mení znamienko z kladného na záporné v bode c, potom f má v bode c lokálne maximum.

b) Ak f' mení znamienko zo záporného na kladné v bode c, potom f má v bode c lokálne minimum.

Example 372 *Nech $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x^4+4x$. Nájdime lokálne minimum alebo maximum funkcie f.*

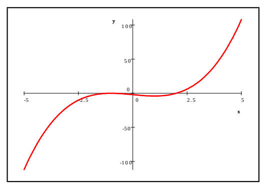
Solution 373 $f'(x)=4x^3+4=4(x^3+1)=4(x+1)(x^2-x+1)$ *tak* $f'(x)=0$ *pre $x=-1$. Pretože pre $x<-1$ je $f'(x)<0$ pre $x>-1$ je $f'(x)>0$. Teda f' mení znamienko zo záporného na kladné v bode $c=-1$, teda nadobúda v tomto bode ostré lokálne minimum* $\min f(x)=f(-1)=-3$, *ktoré je v tomto prípade aj minimom. Pre lepší prehľad načrtneme obrázok*



□

Example 374 *Nech* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x - 2$. *Nájdime lokálne minimum alebo maximum funkcie* f *a načrtnite jej graf.*

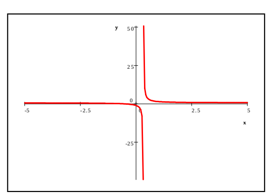
Solution 375 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. *Potom* $f'(x) > 0$ *pre* $x < -1 \vee x > 1$ *a* $f'(x) < 0$ *pre* $-1 < x < 1$. *Teda* f *je rastúca na* $(-\infty, -1)$ *a* $(1, \infty)$ *a klesajúca na intervale* $(-1, 1)$. *Okrem toho v bode* $x = -1$ f' *mení znamienko z kladného na záporné, teda* $f(-1) = 0$ *je lokálne maximum, v bode* $x = 1 f'$ *mení znamienko zo záporného na kladné a teda* $f(1) = -4$ *je lokálne minimum. Pre lepší prehľad načrtneme obrázok*



□

Example 376 *Nech* $f : \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$. *Zistime intervaly monotónnosti, lokálne extrémy funkcie a načrtnite graf funkcie* f.

Solution 377 $f'(x) = -\frac{5}{(3x-1)^2}$. *Tak* $f'(x) < 0$, $\forall x \in D(f)$ *a teda* f *je klesajúca na intervaloch* $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ *a* $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. *Aby sme mohli lepšie načrtnúť graf funkcie* f *vypočítame* $\lim_{x \longrightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{2x+1}{3x-1} = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{2x+1}{3x-1} = \infty$,*teda priamka* $x = \frac{1}{3}$ *je vertikálna asymptota. Platí* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3}$.*V tomto prípade aj keď je* $f'(x) < 0$, $\forall x \in D(f)$ *nie je pravda, že* f *je klesajúca na* $D(f)$. *Skutočne* $\forall x_1 \in (-\infty, \frac{1}{3}) \wedge \forall x_2 \in (\frac{1}{3}, \infty)$ *platí* $f(x_1) < f(x_2)$, *preto funkcia* f *nemôže byť klesajúca na* $D(f)$, *ale je klesajúca na intervaloch* $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ *a* $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. *Pre lepší prehľad načrtneme obrázok*



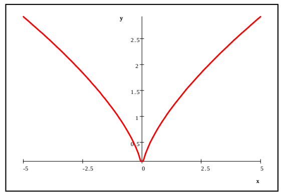
□

Example 378 *Nech* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. *Nájdime extrémy funkcie* f.

Solution 379 $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ *pre* $x \neq 0$. *Derivácia funkcie v bode* $x = 0$ *neexistuje, pretože ak by existovala, potom by platilo:*

$$f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \begin{cases} -\infty, & \text{pre} \quad x < 0 \\ \infty, & \text{pre} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(0) \nexists .$$

Pretože $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D(f)$, $\min_{\mathbf{R}} f(x) = f(0) = 0$ *je minimom funkcie* f. *Pre lepší prehľad načrtneme obrázok*



□

Konvexnosť, konkávnosť a inflexné body.
Nech $f : A \to \boldsymbol{R}$, $c \in A$ je diferencovateľná v bode c. Potom dotyčnica l_c ku grafu funkcie f v bode $(c, f(c))$ má rovnicu $l_c : y = f(c) + f\,'(c)(x - c)$.

Definition 380 *a) Nech $f : A \to \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná v bode $c \in A$ a nech l_c je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $(c, f(c))$. Graf funkcie f je konvexný (konkávny) v bode $(c, f(c))$, ak existuje $O_\delta(c) \subset A$ taký, že ak $x \in O_\delta^\circ(c)$ potom bod $(x, f(x))$ leží nad (pod) dotyčnicou l_c.*

b) Graf funkcie f je konvexný (konkávny) na otvorenom intervale $I \subset A$, ak je konvexný (konkávny) v bode $(x, f(x))$ pre každé $x \in I$.

Nech pre funkciu $f : A \to \boldsymbol{R}$ existuje $f\,'(c)$ a nech I je otvorený interval $I \subset A$, $c \in I$. Definujme funkciu

$$g : I \to \boldsymbol{R},\ g(x) = f(x) - [f(c) + f\,'(c)(x - c)]\,.$$

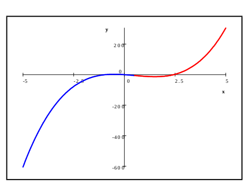
- Ak $g(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x \neq c$, potom dotyčnica ku grafu funkcie f prechádzajúca bodom $(c, f(c))$ leží nad grafom funkcie f na I.
- Ak $g(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x \neq c$, potom dotyčnica ku grafu funkcie f prechádzajúca bodom $(c, f(c))$ leží pod grafom funkcie f na I.

Theorem 381 *(Nutná a postačujúca podmienka konvexnosti (konkávnosti)) Nech I je interval a $f : I \to \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia. Nech $f : I \to \boldsymbol{R}$ je dvakrát diferencovateľná vo vnútri intervalu I. Potom je funkcia $f : I \to \boldsymbol{R}$ konvexná (konkávna) na intervale I práve vtedy, keď pre každý vnútorný bod $x \in I$ je*

$$f\,''(x) > 0\ (f\,''(x) < 0).$$

Example 382 *Nech $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia konvexná alebo konkávna.*

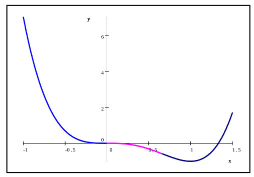
Example 383 $f\,'(x) = 12x^2 - 12x - 9$, $f\,''(x) = 24x - 12 = 24\left(x - \frac{1}{2}\right)$. *Potom $f\,''(x) > 0$, ak $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, teda na tomto intervale je funkcia konvexná a $f\,''(x) < 0$, ak $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, teda na tomto intervale je funkcia konkávna.*$4x^3 - 6x^2 - 9x$



□

Example 384 *Nech* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3$. *Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia konvexná alebo konkávna.*

Solution 385 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right)$. *Pretože* $f''(x) > 0$ *na* $(-\infty, 0)$ *a* $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, *na týchto intervaloch je funkcia konvexná a* $f''(x) < 0$, *ak* $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, *teda na tomto intervale je funkcia konkávna.*$3x^4 - 4x^3$



□

Inflexné body.

V predchádzajúcom príklade sa konvexnosť funkcie menila v bode $(0, f(0))$ na konkávnosť a konkávnosť v bode $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ na konvexnosť.

Definition 386 *Nech* $f : A \to \mathbf{R}$, $c \in A$. *Nech existuje* $O_\varepsilon(c) \subset A$ *také, že* f *je na* $O_\varepsilon(c)$ *dvakrát diferencovateľná. Ak pre každé*

$$x_1,\, x_2 \in O_\varepsilon(c),\, x_1 < c < x_2 je f''(x_1).f''(x_2) < 0,$$

potom hovoríme, že funkcia f *má v bode* c *inflexný bod.*

Example 387 *Nech* $f : \langle -2\pi, 2\pi \rangle \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$. *Nájdite inflexné body funkcie* f.

Solution 388 $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. *Potom* $f''(x) = 0$, *ak* $x = -\pi, 0, \pi$, *teda toto sú inflexné body funkcie* f. □

Okrem „testu prvou deriváciou" existuje aj iná - priama metóda ako zistiť, či funkcia nadobúda v stacionárnom bode maximum alebo minimum:

Theorem 389 *(Veta o zisťovaní minima a maxima) Nech* $k \geq 2$ *je párne prirodzené číslo a* $f^{(k)} : A_k \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* $O_\delta(c)$. *Nech* $f^{(i)}(c) = 0$ *pre* $i = 1, 2, ..., k-1$ *a* $f^{(k)}(c) \neq 0$. *Ak* $f^{(k)}(c) < 0$, *má funkcia* $f : A \to \mathbf{R}$ *v bode* c *ostré lokálne maximum. Ak* $f^{(k)}(c) > 0$, *má funkcia* $f : A \to \mathbf{R}$ *v bode* c *ostré lokálne minimum.*

Theorem 390 *(Veta o zisťovaní inflexného bodu) Nech* $k \geq 3$ *je prirodzené číslo a* $f^{(k)} : A_k \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* $O_\delta(c)$. *Nech* $f^{(i)}(c) = 0$ *pre* $i = 2, 3, ..., k-1$ *a* $f^{(k)}(c) \neq 0$. *Potom platí:*

Ak k *je nepárne, tak funkcia* $f : A \to \mathbf{R}$ *má v bode* c *inflexný bod.*

Ak k *je párne, tak funkcia* $f : A \to \mathbf{R}$ *nemá v bode* c *inflexný bod.*

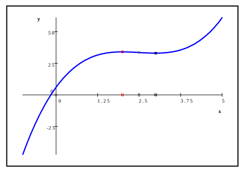
Example 391 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 6$. *Vyšetrime extrémy a inflexné body funkcie.*

Solution 392 $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-3)(x-2)$, $f''(x) = 12x - 30 = 12\left(x - \frac{5}{2}\right)$,

$f'(2) = 0$, $f''(2) = -6 < 0$ *v bode* $x = 2$ *nadobúda funkcia* f *ostré lokálne maximum.*

$$f'(3) = 0, \ f''(3) = 6 > 0$$

v bode $x = 3$ *nadobúda funkcia* f *ostré lokálne minimum.* $f'''(x) = 12$. *Pretože* $f''\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ *a* $f'''\left(\frac{5}{2}\right) = 12$, *tak v bode* $x = \frac{5}{2}$ *má* f *inflexný bod.*



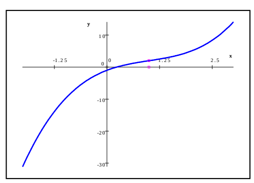
□

Example 393 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = (x-1)^3 + 2x$. *Vyšetrime extrémy a inflexné body funkcie.*

Solution 394 $f'(x) = 3(x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$ *funkcia* f *je rastúca na* $\boldsymbol{R}$.

$$f''(x) = 6(x-1), \ f''(1) = 0, \ f'''(x) = 6, \ f'''(1) = 6 \neq 0, \ f^{(4)}(x) = 0$$

funkcia f *má v bode* $x = 1$ *inflexný bod.*$(x-1)^3 + 2x$



□

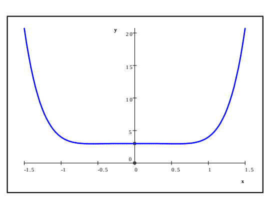
Example 395 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^6 - x^4 + 3$. *Vyšetrime chovanie funkcie v bode* $x = 0$.

Solution 396 *Máme*

$$f'(x) = 12x^5 - 4x^3 = 4x^3(3x^2 - 1), \ f'(0) = 0, \ f''(x) = 60x^4 - 12x^2 = 12x^2(5x^2 - 1),$$

$$f''(0) = 0, \ f'''(x) = 240x^3 - 24x = 24x(10x^2 - 1), \ f'''(0) = 0,$$
$$f^{(4)}(x) = 720x^2 - 24, \ f^{(4)}(0) = -24 < 0.$$

Funkcia f *má v bode* $x = 0$ *ostré lokálne maximum aj keď to tak podľa obrázku nemusí vyzerať.*



□

Example 397 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^{11} - 3x^5 + 1$. *Vyšetrime chovanie funkcie v bode* $x = 0$.

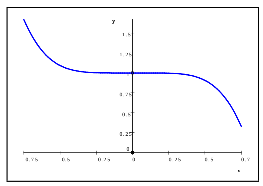
Solution 398 *Máme*

$$f'(x) = 11x^{10} - 15x^4,\ f'(0) = 0.\ f''(x) = 110x^9 - 60x^3,\ f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = 990x^8 - 180x^2,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(x) = 7920x^7 - 360x,\ f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = 55440x^6 - 360,\ f^{(5)}(0) = -360 \neq 0.$$

Funkcia f *má v bode* $x = 0$ *inflexný bod.*



□

Priebeh funkcie.

Asymptoty funkcie.

Definition 399 *a) Nech je daná funkcia* $f : (a, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}$ *a priamka* $y = kx + q$.

Nech $\lim_{x \longrightarrow \infty} [f(x) - kx - q] = 0$.*Priamku* $y = kx + q$ *nazývame asymptotou ku grafu funkcie* f *v bode* ∞. *(ass)*

b) Nech je daná funkcia $f : (-\infty, a) \to \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}$ *a priamka* $y = kx + q$.

Nech $\lim_{x \longrightarrow -\infty} [f(x) - kx - q] = 0$.*Priamku* $y = kx + q$ *nazývame asymptotou ku grafu funkcie* f *v bode* $-\infty$.

c) Ak pre funkciu $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}$, *kde a je hromadný bod množiny A platí aspoň jeden z nasledujúcich štyroch vzťahov*

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \infty,\ \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = -\infty,$$

potom priamku $x = a$ *nazývame vertikálnou asymptotou, alebo asymptotou bez smernice (abs) ku grafu funkcie* f.

Theorem 400 *Priamka* $y = kx + q$ *je asymptotou ku grafu funkcie* $f : (a, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}$ *v bode* ∞ *vtedy a len vtedy ak*

$$k = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},\ q = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Ak vo vete o asymptote zameníme ∞ *za* $-\infty$ *dostaneme, že veta platí aj pre asymptotu ku grafu funkcie* f *v bode* $-\infty$.

Example 401 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$. *Nájdime asymptoty ku grafu funkcie* f *.*

Solution 402 *Funkcia* f *je spojitá na celom definičnom obore* $\boldsymbol{R}$, *preto môže mať iba ass v bodoch* $-\infty$ *a* ∞. *Pre ass ku grafu v bode* ∞ *máme*

$$k = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x - 2 \operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \longrightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \longrightarrow \infty} [x - 2 \operatorname{arctg} x - x] = -2 \lim_{x \longrightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = -\pi.$$

Teda asymptota ku grafu v bode ∞ *je priamka* $y = x - \pi$. *Podobne asymptota ku grafu v bode* $-\infty$

$$k = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x - 2 \operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \longrightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \longrightarrow -\infty} [x - 2 \operatorname{arctg} x - x] = -2 \lim_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi,$$

je priamka $y = x + \pi$.□

Example 403 *Nech* $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$. *Nájdime asymptoty ku grafu funkcie* f. *Nech* $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^{11} - 3x^5 + 1$. *Vyšetrime chovanie funkcie v bode* $x = 0$.

Solution 404 *Funkcia* f *je spojitá na celom* $\boldsymbol{R}$, *preto môže mať iba ass v bodoch* ∞ *a* $-\infty$. *Pre asymptotu ku grafu v bode* ∞ *máme*

$$k = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

$$q = \lim_{x \longrightarrow \infty} [f(x) - 0.x] = \lim_{x \longrightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Teda asymptota ku grafu v bode ∞ *je priamka* $y = 0$. *Podobne v bode* $-\infty$

$$k = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty,$$

f *nemá asymptotu ku grafu v bode* $-\infty$. □

Zisťovanie priebehu funkcie.

Znalosť diferenciálneho počtu nám pomáha zistiť priebeh funkcie. V tejto časti spojíme všetky doteraz prezentované metódy a tak máme možnosť komplexne posúdiť graf funkcie. Pre danú funkciu budeme vyžadovať:

- Nájsť definičný obor funkcie - $D(f)$, zistiť kde je funkcia spojitá, nájsť body nespojitosti a prípadne vertikálne asymptoty. Nájsť nulové body funkcie.

- Zistiť párnosť alebo nepárnosť funkcie.

- Zistiť periodickosť funkcie.

- Nájsť intervaly, na ktorých je funkcia monotónna s využitím derivácie funkcie prvého rádu.
- Nájsť lokálne extrémy.
- Nájsť intervaly, na ktorých je funkcia konvexná alebo konkávna s využitím derivácie funkcie druhého rádu.
- Nájsť inflexné body.
- Skúmať chovanie funkcie v krajných bodoch definičného oboru, ak definičný obor obsahuje body $\pm\infty$ nájsť asymptoty ku grafu funkcie, zistiť obor hodnôt funkcie $H(f)$.

  Tieto údaje spolu s dostatočným počtom bodov grafu funkcie nám dajú možnosť znázorniť graf funkcie v rovine.

Remark 405 *Pri hľadaní ass ku grafu funkcie v bodoch ∞ a $-\infty$ je výhodné najskôr zistiť chovanie funkcie v týchto bodoch. Ak platí $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = L \in \boldsymbol{R}$, potom priamka $y = L$ je asymptotou ku grafu funkcie v bode ∞. Také isté tvrdenie platí aj pre bod $-\infty$. Dôkaz tohto tvrdenia je jednoduchý.*

Example 406 *Zistime priebeh funkcie $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.*

Solution 407 *1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, funkcia je spojitá v každom bode $x \in \boldsymbol{R}$ (rozdiel dvoch spojitých funkcií). Pretože $\operatorname{arctg} 0 = 0$, nájdeme aj nulový bod $f(0) = 0$. Aby sme našli ostatné nulové body museli by sme riešiť rovnicu*

$$x - 2\operatorname{arctg} x = 0.$$

Túto však nevieme analyticky vyriešiť a tak ostatné nulové body nájdeme keď budeme kresliť graf funkcie f.

2) Platí: $x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f) \wedge f(-x) = -x - 2\operatorname{arctg}(-x) = -x + 2\operatorname{arctg} x = -f(x)$,teda funkcia f je nepárna. V tomto bode sme využili znalosti vlastností elementárnej funkcie arctg.

3) Funkcia f nie je periodická.

4) Pre deriváciu dostaneme $f'(x) = 1-2\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, teda f je diferencovateľná $\forall x \in \boldsymbol{R}$ a teda aj spojitá (čo sme skonštatovali v bode 1) inými metódami), pritom je

$f'(x) > 0$ na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, kde je funkcia f rastúca $\nearrow$,
$f'(x) < 0$ na $(-1, 1)$, kde je funkcia klesajúca $\searrow$.
Z týchto znalostí tiež vieme, že funkcia nie je periodická.

5) V bode $x = -1$ má ostré lokálne maximum $\operatorname{lokmax} f(x) = f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$, v bode $x = 1$ má ostré lokálne minimum $\operatorname{lokmin} f(x) = f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

6) $f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, pre každé $x \in \boldsymbol{R}$, pritom je
$f''(x) < 0$ na $(-\infty, 0)$, kde je funkcia konkávna $\cap$,
$f''(x) > 0$ na $(0, \infty)$, kde je funkcia konvexná $\cup$.

7) V bode $x = 0$ má funkcia f inflexný bod.

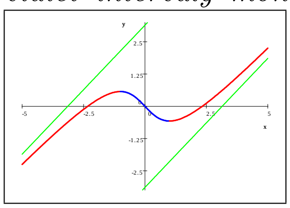
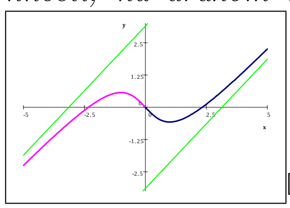
8) Skúmame chovanie funkcie v krajných bodoch definičného oboru:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x) = \infty, \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} (x - 2\operatorname{arctg} x) = -\infty.$$

Pretože limity v bodoch $\pm\infty$ sú nevlastné treba nájsť asymptoty ku grafu funkcie f v týchto bodoch. Asymptoty ku grafu funkcie f sme našli v predchádzajúcom príklade:

v bode $-\infty$ je asymptota ku grafu funkcie priamka $y = x + \pi$,

v bode ∞ je asymptota ku grafu funkcie priamka $y = x - \pi$. $H(f) = \mathbf{R}$. *Teraz môžme načrtnúť graf funkcie f. a jeho asymptoty. Na prvom obrázku je vidieť intervaly monotónnosti, na druhom intervaly konvexnosti a konkávnosti.*



$\square$

Example 408 *Zistime priebeh funkcie $f(x) = x^2e^{-x}$.*

Solution 409 *1) $D(f) = \mathbf{R}$, funkcia je spojitá v každom bode $x \in \mathbf{R}$, pretože je súčinom dvoch spojitých funkcií. Nulový bod: jediný $x = 0$, $f(0) = 0$.*

2) Platí:

$$x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f) \wedge f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} = x^2e^x \neq \left\{ \begin{array}{c} x^2e^{-x} = f(x) \\ -x^2e^{-x} = -f(x) \end{array} \right. ,$$

funkcia f nie je párna ani nepárna.

3) Funkcia f nie je periodická. Ak by f bola periodická musela by mať nekonečne mnoho nulových bodov.

4) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$, teda f je diferencovateľná $\forall x \in \mathbf{R}$ a teda aj spojitá, pritom je

$$f'(x) < 0 \ \ na \ \ (-\infty, 0) \ \ a \ \ (2, \infty), \ \ kde\ je\ funkcia\ klesajúca \searrow,$$

$$f'(x) > 0 \ \ na \ \ (0, 2), kde\ je\ funkcia\ rastúca \nearrow .$$

5) V bode $x = 0$ má ostré lokálne minimum $\operatorname{lokmin} f(x) = f(0) = 0$, *v bode $x = 2$ má ostré lokálne maximum* $\operatorname{lokmax} f(x) = f(2) = \frac{4}{e^2}$.

6) $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$, pre každé $x \in \mathbf{R}$, pritom je

$$f''(x) > 0 \ \ na \ \ \left(-\infty, 2 - \sqrt{2}\right) \ \ a \ \ \left(2 + \sqrt{2}, \infty\right), \ \ kde\ je\ funkcia\ konvexná \cup,$$

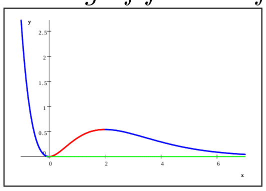
$$f''(x) < 0 \ \ na \ \left(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right), \ \ kde\ je\ funkcia\ konkávna \cap .$$

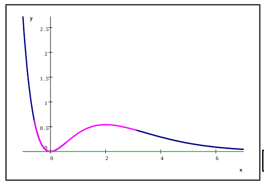
7) V bodoch $x = 2 - \sqrt{2}$, $x = 2 + \sqrt{2}$ má funkcia f inflexné body.

8) Skúmame chovanie funkcie v krajných bodoch definičného oboru:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} x^2e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} x^2e^{-x} = \infty.$$

Pretože limita v bode ∞ je vlastná je priamka $y = 0$ asymptotou ku grafu funkcie f v ∞, v bode $-\infty$ je limita nevlastná, preto treba nájsť asymptotu ku grafu funkcie f v $-\infty$. Asymptoty funkcie f sme hľadali v predchádzajúcich príkladoch a zistili sme, že f nemá asymptotu ku grafu v bode ∞. $H(f) = \langle 0, \infty)$. Teraz môžme načrtnúť graf funkcie f.





$\square$

Example 410 *Zistime priebeh funkcie $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.*

Solution 411 *1) Musí platiť $8 + 2x - x^2 \geq 0 \Longrightarrow (x + 2)(4 - x) \geq 0 \Longrightarrow D(f) = \langle -2, 4\rangle$. Funkcia je spojitá v každom bode $x \in D(f)$, pretože je zloženou funkciou z dvoch spojitých funkcií. Nulové body $x = -2$, $f(-2) = 0$, $x = 4$, $f(4) = 0$.*

2) Platí napríklad: $3 \in D(f) \Longrightarrow -3 \notin D(f) \Longrightarrow$funkcia f nie je párna ani nepárna.

3) Funkcia f nie je periodická. Ak by f bola periodická musela by mať nekonečne mnoho nulových bodov.

4) $f\,'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$, teda f je diferencovateľná $\forall x \in (-2, 4)$ a teda aj spojitá (čo sme už ukázali aj v bode 1)), pritom je

$$f\,'(x) < 0 \text{ na } (1, 4)\,, \text{ kde je funkcia klesajúca} \searrow,$$

$$f\,'(x) > 0 \text{ na } (-2, 1)\,, \text{ kde je funkcia rastúca} \nearrow.$$

5) V bode $x = 1$ má ostré maximum $\max_{x \in \langle -2,4\rangle} f(x) = f(1) = 3$. V bodoch $x = -2$ a $x = 4$ má minimum $\min_{x \in \langle -2,4\rangle} f(x) = f(-2) = f(4) = 0$.

6) $f\,''(x) = \frac{-9}{\left(\sqrt{8+2x-x^2}\right)^3}$, pre každé $x \in (-2, 4)$, pritom je $f\,''(x) < 0$ na $(-2, 4)$, kde je funkcia konkávna $\cap$.

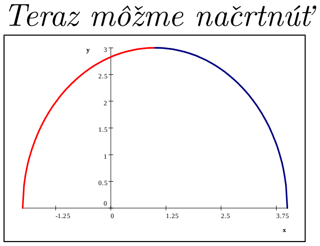
7) Funkcia f nemá inflexné body.

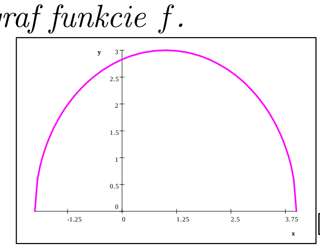
8) Skúmame chovanie funkcie v krajných bodoch definičného oboru sme už zistili v bode 1) :

$$f(-2) = 0, \; f(4) = 0.$$

Pretože definičný obor funkcie neobsahuje body $\pm\infty$, nemôžeme hľadať ass v týchto bodoch. $H(f) = \langle 0, 3\rangle$.

Teraz môžme načrtnúť graf funkcie f.





$\square$

Cvičenia.

1. Vyšetrite monotónnosť funkcie $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ a jej extrémy ak existujú.

$$\left[\begin{array}{c} D(f) = (0,1) \cup (1,\infty),\ f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, \\ \nearrow \text{na } (e,\infty), \searrow \text{ na } (0,1) \text{ a na } (1,e),\ f(e) = e = \min f(x). \end{array}\right]$$

2. Vyšetrite monotónnosť funkcie $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ a jej extrémy ak existujú.

$$\left[\begin{array}{l} D(f) = \boldsymbol{R},\ f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}, \\ \nearrow \text{ na } D(f), \text{nemá extrém.} \end{array}\right]$$

3. Pomocou Rolleho vety ukáte, že rovnica $\operatorname{tg} x = 1 - x$ má v intervale $(0,1)$ riešenie.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Návod: zvoľte v Rolleho vete funkciu } f(x) \text{ takto} \\ f : \langle 0,1\rangle \to R,\ f(x) = (x-1)\sin x. \\ \text{Potom } f \text{ je spojitá na } \langle 0,1\rangle, f'(x) = \sin x + (x-1)\cos x, \\ \text{diferencovateľná na } (0,1) \text{(samozrejme aj na } \boldsymbol{R}), \\ f(0) = 0, f(1) = 0, \text{ predpoklady Rolleho vety sú splnené,} \\ \text{tak } \exists c \in (0,1) : f'(c) = 0,\ \sin c + (c-1)\cos c = 0, \\ \text{pretože t.j.} \cos c \neq 0 \ \Rightarrow\ \operatorname{tg} c = 1 - c. \end{array}\right]$$

4. Zistite, či platí Cauchyho veta pre funkcie $f,\ g \quad f, g. \langle 0,1\rangle \to R,\ f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$, a nájdite číslo c, pre ktoré platí $c \in (0,1)$, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
$\left[\text{Áno}, \quad c = \frac{2}{3}\right]$

5. Zistite, či platí Lagrangeova veta pre funkciu $f. \langle 1,e\rangle \to R,\ f(x) = \ln x$, a nájdite číslo c, pre ktoré platí $c \in (1,e)$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
$\left[\text{Áno}, \ c = e - 1.\right]$

6. Zistite, či Rolleho veta platí pre funkciu $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^2}$ na intervale $\langle -1,1\rangle$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Funkcia } f \text{ je spojitá, platí } f(-1) = f(1) = 0. \\ f'(x) = -\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} \text{existuje pre } x \in (-1,0) \cup (0,1), \text{ ale } f'(0) \text{ neexistuje.} \\ \text{Predpoklady Rolleho vety nie sú splnené.} \end{array}\right]$$

7. Zistite, či platí Lagrangeova veta pre funkciu $f(x) = x + \frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1,2\rangle$?

$$\left[\begin{array}{c} \text{Funkcia } f \text{ je spojitá na danom intervale,} \\ f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \text{ je diferencovateľná na } (1,2). \\ \text{Predpoklady Lagrangeovej vety sú splnené,} \\ \text{to znamená, že } \exists c \in (1,2), \text{ také že} \\ f(2) - f(1) = f'(c)(2-1), t.j. \frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{c^2}) \Rightarrow\ c = \pm\sqrt{2}. \\ \text{Vyhovuje } c = \sqrt{2}. \end{array}\right]$$

8. Dokážte, že platí: $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < b - a$, pre $a < b$.

9. Zistite, či Cauchyho veta platí pre funkcie $f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin x$ na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$?

$\left[\text{Áno platí, } c = \frac{\pi}{4}.\right]$

10. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$.

$$\left[\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-\sin x}{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)} = -1.\right]$$

11. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$. $[1]$

12. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0^+} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x$. $[1]$

13. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. $\left[-\frac{4}{\pi}\right]$

14. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. $[1]$

15. Vypočítajte limitu $\lim_{x\longrightarrow a} \left[\frac{\sin x}{\sin a}\right]^{\operatorname{cotg}(x-a)}$. $\left[e^{\operatorname{cotg} a}\right]$

16. Kapacita C rovinného kondenzátora, ktorého dosky majú plochu S, vzdialenosť medzi doskami je l a permitivita dielektrika sa v závislosti od vzdialenosti lineárne mení od hodnoty ε_1 pri jednej doske po hodnotu $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ pri druhej doske je daná vzťahom $C = \frac{S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{l \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$. Určte kapacitu kondenzátora, ktorého permitivita má hodnotu ε_1 a nemení sa v závislosti od vzdialenosti.

$\left[\text{Pomocou L'Hôpitalovho pravidla nájdite } \lim_{\varepsilon_2 \to \varepsilon_1} C = \lim_{\varepsilon_2 \to \varepsilon_1} \frac{S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{l \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{S\varepsilon_1}{l}.\right]$

17. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ a načrtnite jej graf.

[

1) $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty), f(\frac{1}{2}) = 0,$ spojitá,
$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty,$ priamka $x = 1$ je abs.

2) Platí $-1 \in D(f),\ 1 \notin D(f)$.Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď1) nie je periodická.

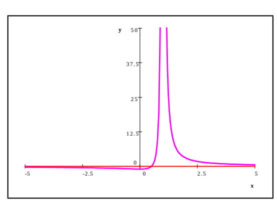
4) $f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$,
ak $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \searrow$,
ak $x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \nearrow$,
ak $x \in (1, \infty) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \searrow$.

5) $f(0) = -1 = \operatorname{lokmin} f(x) = \min_{x \in D(f)} f(x)$.

6) $f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$,
ak $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \cap$
ak $x \in (-\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \cup$,
ak $x \in (1, \infty) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \cup$.

7) V bode $x = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = -\frac{8}{9}$ je inflexný bod.

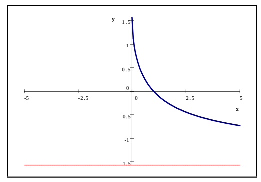
8) $\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$. Priamka $y = 0$ je asymptota v bode ∞ aj $-\infty$.

$H(f) = \langle -1, \infty)$. 

]

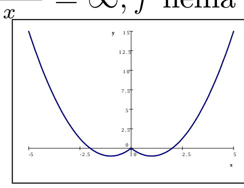
18. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\ D(f)=\langle 0,\infty),f(1)=0,\text{spojitá, nemá abs.}\\
2)\ \text{Platí } D(f)=\langle 0,\infty).f \text{ nie je ani párna, ani nepárna.}\\
3)\ \text{Pretože má iba jeden nulový bod (viď1) nie je periodická.}\\
4)\ f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)},\ \text{ak}\ \ x\in(0,\infty)\ f'(x)<0\searrow.\\
5)\ f(0)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}=\max_{x\in D(f)} f(x).\\
6)\ f''(x)=\frac{3x+1}{2x\sqrt{x}(1+x)^2},\ \text{ak } x\in(0,\infty)\Rightarrow\ f''(x)>0\Rightarrow\cup.\\
7)\ \text{Nemá inflexný bod.}\\
8)\ \lim_{x\longrightarrow\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}=-\frac{\pi}{2}.\text{Priamka}\ \ y=-\frac{\pi}{2}\text{ je ass v }\infty.\\
H(f)=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle.
\end{array}\right]$$



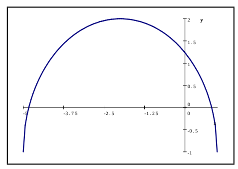
19. Zistite priebeh funkcie $f\left(x\right)=x^2-2\left|x\right|$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & \text{pre}\ \ x\in(-\infty,0)\\ x^2-2x & \text{pre}\ \ x\in\langle 0,\infty)\end{cases},D(f)=\boldsymbol{R},f(-2)=0,\\
f(0)=0,f(2)=0,\text{spojitá, nemá abs.}\\
2)\ \text{Platí}\ \ x\in D(f)\Rightarrow -x\in D(f),\\
f(-x)=(-x)^2-2\left|-x\right|=x^2-2\left|x\right|=f(x).\\
f\text{ je párna.}\\
3)\ \text{Pretože má tri nulové body (viď1) nie je periodická.}\\
4)\ f'(x)=\begin{cases} 2x+2, & \text{pre}\ \ x\in(-\infty,0)\\ 2x-2 & \text{pre}\ \ x\in(0,\infty)\end{cases},f'_+(0)=-2,f'_-(0)=2,f'(0)\nexists,\\
\text{ak } x\in(-\infty,-1)\Rightarrow\ \ f'(x)<0\Rightarrow\searrow,\ \ \text{ak } x\in(-1,0)\ \ \Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\nearrow.\\
\text{ak } x\in(0,1)\Rightarrow\ \ f'(x)<0\Rightarrow\searrow,\ \ \text{ak } x\in(1,\infty)\ \ \Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\nearrow.\\
5)\ f(0)=0=\text{lokmax}\, f(x),f(-1)=f(1)=-1=\min_{x\in D(f)} f(x).\\
6)\ f''(x)=\begin{cases} 2, & \text{pre}\ \ x\in(-\infty,0)\\ 2 & \text{pre}\ \ x\in(0,\infty)\end{cases}\Rightarrow\\
f''(x)>0\Rightarrow\cup\text{ na }(0,\infty)\text{ aj na }(-\infty,0).\\
7)\ \text{Nemá inflexný bod.}\\
8)\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}x^2-2\left|x\right|=\infty.\ \text{Ass v bode}-\infty:\\
k=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^2+2x}{x}=-\infty,f\text{ nemá ass v bode}-\infty.\\
\text{Ass v bode }\infty\text{ máme:}\\
k=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-2x}{x}=\infty,f\text{ nemá ass v bode }\infty.\\
H(f)=\langle -1,\infty).
\end{array}\right]$$



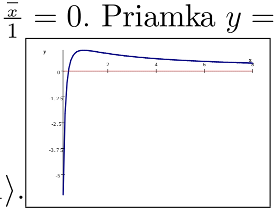
20. Zistite priebeh funkcie $f\left(x\right)=-1+\sqrt{-x^2-4x+5}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\;\; D(f) = \langle -5, 1\rangle, f(-2-2\sqrt{2}) = 0, f(-2+2\sqrt{2}) = 0 \\
\text{spojitá, nemá abs.} \\
2)\ \text{Platí } D(f) = \langle -5, 1\rangle.\ f \text{ nie je ani párna, ani nepárna.} \\
3)\ \text{Nie je periodická.} \\
4)\;\; f'(x) = \frac{-x-2}{\sqrt{-x^2-4x+5}} \;\; \text{existuje na } (-5, 1), \\
\text{ak } x \in (-5, -2) \Rightarrow\;\; f'(x) > 0 \Rightarrow \nearrow, \\
\text{ak }\;\; x \in (-2, 1) \Rightarrow\;\; f'(x) < 0 \Rightarrow \searrow. \\
5)\ f(-2) = -1 + \sqrt{9} = 2 = \max_{x\in D(f)} f(x), \\
f(-5) = -1 = \min_{x\in D(f)} f(x) = f(1). \\
6)\;\; f''(x) = \frac{-9}{(\sqrt{-x^2-4x+5})^3} \;\text{existuje na}(-5, 1), \\
\text{ak } x \in (-5, 1) \Rightarrow\;\; f''(x) < 0 \Rightarrow \cap. \\
7)\ \text{Nemá inflexný bod.} \\
8)\ f(-5) = -1, f(1) = -1.\ \text{Pretože } D(f) \text{ neobsahuje body } \pm\infty, \\
\text{nemá ass.} \\
H(f) = \langle -1, 2\rangle.
\end{array}\right]$$



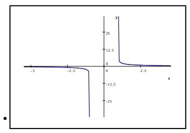
21. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\;\; D(f) = (0, \infty), f(\tfrac{1}{e}) = 0, \text{spojitá,} \\
\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x}\ln x + 1 = -\infty. \\
\text{Priamka } x = 0 \text{ je abs.} \\
2)\ \text{Platí } D(f) = (0, \infty).f \text{ nie je ani párna, ani nepárna.} \\
3)\ \text{Pretože má iba jeden nulový bod (viď1) nie je periodická.} \\
4)\ f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2},\ \text{ak }\;\; x \in (0, 1) \Rightarrow\;\; f'(x) > 0 \Rightarrow \nearrow, \\
\text{ak } x \in (1, \infty) \Rightarrow\;\; f'(x) < 0 \Rightarrow \searrow. \\
5)\ f(1) = 1 = \max_{x\in D(f)} f(x) \\
6)\;\; f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3},\ \text{ak }\;\; x \in (0, e^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow\;\; f''(x) < 0 \Rightarrow \cap, \\
\text{ak }\;\; x \in (e^{\frac{1}{2}}, \infty) \Rightarrow\;\; f''(x) > 0 \Rightarrow \cup. \\
7)\ \text{V bode } x = e^{\frac{1}{2}}, f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} \text{ je inflexný bod.} \\
8)\ \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.\ \text{Priamka } y = 0 \text{ je ass v } \infty. \\
H(f) = (-\infty, 1\rangle.
\end{array}\right]$$



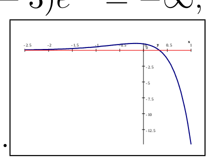
22. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c} 1)\ D(f) = (-\infty,-1)\cup(1,\infty),\ \text{nemá nulový bod, spojitá,} \\ \lim_{x\longrightarrow -1^-} \ln\frac{x+1}{x-1} = -\infty,\ \text{priamka } x=-1 \text{ je abs,} \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} \ln\frac{x+1}{x-1} = \infty,\ \text{priamka } x=1 \text{ je abs.} \\ 2)\ \text{Platí } x\in D(f) \Rightarrow -x\in D(f). \\ f(-x) = \ln\frac{-x+1}{-x-1} = \ln\frac{x-1}{x+1} = -\ln\frac{x+1}{x-1} = -f(x),\ f \text{ je nepárna.} \\ 3)\ \text{Funkcia je zložená ani vnútorná ani vonkajšia zložka} \\ \text{nie sú periodické funkcie, ani } f \text{ nie je periodická.} \\ 4)\ f'(x) = -\frac{2}{x^2-1},\ \text{ak } x\in(-\infty,-1)\ f'(x)<0 \searrow, \\ \text{ak } x\in(1,\infty)\ f'(x)<0 \searrow. \\ 5)\ \text{Nemá extrém. } 6)\ f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}, \\ \text{ak } x\in(-\infty,-1)\ f''(x)<0 \cap,\ \text{ak } x\in(1,\infty)\ f''(x)>0\ \cup. \\ 7)\ \text{Nemá inflexné body.} \\ 8)\ \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = 0.\ \text{Priamka } y=0 \text{ je asymptota v } \infty \text{ aj } -\infty. \\ H(f) = (-\infty,0)\cup(0,\infty). \end{array}\right]$$



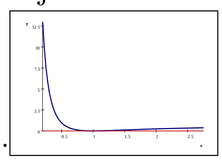
23. Zistite priebeh funkcie $f\,(x) = (1-3x)\,e^{2x}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c} 1)\ D(f) = \boldsymbol{R}, f(\tfrac{1}{3}) = 0,\ \text{spojitá, nemá abs.} \\ 2)\ \text{Platí } x\in D(f) \Rightarrow -x\in D(f). \\ f(-x) = (1-3(-x))e^{2(-x)} = (1+3x)e^{-2x}. \\ f \text{ nie je ani párna, ani nepárna.} \\ 3)\ \text{Jeden nulový bod } \Rightarrow \text{nie je periodická.} \\ 4)\ f'(x) = (-1-6x)e^{2x},\ \text{ak } x\in(-\infty,-\tfrac{1}{6})\ \ f'(x)>0 \nearrow, \\ \text{ak } x\in(-\tfrac{1}{6},\infty)\ \ f'(x)<0\searrow.\ 5)\ f(-\tfrac{1}{6}) = \tfrac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}} = \text{lokmax} f(x) \\ 6)\ f''(x) = (-8-12x)e^{2x},\ \text{ak } x\in(-\infty,-\tfrac{2}{3})\ \ f''(x)>0\cup, \\ \text{ak } x\in(-\tfrac{2}{3},\infty)\ \ f''(x)<0\cap. \\ 7)\ \text{V bode } x=-\tfrac{2}{3}, f(-\tfrac{2}{3}) = 3e^{-\frac{4}{3}} \text{ je inflexný bod.} \\ 8)\ \lim_{x\longrightarrow-\infty}(1-3x)e^{2x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1-3x}{e^{-2x}} = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{-3}{-2e^{-2x}} = 0. \\ \text{Priamka } y=0 \text{ je ass v bode } -\infty.\ \lim_{x\longrightarrow\infty}(1-3x)e^{2x} = -\infty. \\ \text{Hľadáme ass funkcie } f \text{ v bode } \infty. \\ k = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(1-3x)e^{2x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty}(\tfrac{1}{x}-3)e^{2x} = -\infty, f \text{ nemá ass v } \infty. \\ H(f) = (-\infty,\tfrac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}\rangle. \end{array}\right]$$



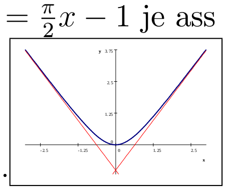
24. Zistite priebeh funkcie $f\,(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\ D(f)=(0,\infty), f(1)=0,\ \text{spojitá (podiel dvoch spojitých).}\\
\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1}{x}\ln^2 x=\infty.\ \text{Priamka } x=0 \text{ je abs.}\\
2)\ \text{Platí } D(f)=(0,\infty).\text{Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.}\\
3)\ f\ \ \text{má jeden nulový bod, te da niejeperiodická.}\\
4)\ f'(x)=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2},\ \text{ak } x\in(0,1)\ f'(x)<0\searrow,\\
\text{ak } x\in(1,e^2)\ f'(x)>0\nearrow,\ \text{ak } x\in(e^2,\infty)\ f'(x)<0\searrow.\\
5)\ f(1)=0=\min_{x\in D(f)}f(x), f(e^2)=\frac{4}{e^2}=\text{lokmax}\, f(x).\\
6)\ f''(x)=\frac{2(\ln^2 x-3\ln x+1)}{x^3},\ \text{ak } x\in(0,e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}})\ f''(x)>0\cup,\\
\text{ak } x\in(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}},e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})\ f''(x)<0\cap, \text{ak } x\in(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}),\infty)\ f''(x)>0\cup.\\
7)\ \text{V bodoch } x=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, x=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\text{sú inflexné body.}\\
8)\ \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0.\\
\text{Priamka } y=0 \text{ je ass v } \infty.\\
H(f)=\langle 0,\infty).
\end{array}\right]$$



25. Zistite priebeh funkcie $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\ D(f)=\boldsymbol{R}, f(0)=0,\ \text{spojitá, nemá abs.}\\
2)\ \text{Platí } x\in D(f)\Rightarrow -x\in D(f).\\
f(-x)=(-x)\operatorname{arctg}(-x)=x\operatorname{arctg}x=f(x).f \text{ je párna.}\\
3)\ \text{Nie je periodická. (jeden nulový bod).}\\
4) f'(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2},\ \text{ak } x\in(-\infty,0)\ f'(x)<0\searrow,\\
\text{ak } x\in(0,\infty)\ f'(x)>0\nearrow.\\
5)\ f(0)=0=\min_{x\in D(f)}f(x)\\
6)\ f''(x)=\frac{2}{(1+x^2)^2},\ \text{ak } x\in(-\infty,\infty)\ f''(x)>0\cup.\\
7)\ \text{Nemá inflexný bod.}\\
8)\lim_{x\longrightarrow-\infty}x\operatorname{arctg}x=\infty.\text{Ass v bode} -\infty:\\
k=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2},\\
q=\lim_{x\longrightarrow-\infty}x\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1.\\
\text{Priamka } y=-\frac{\pi}{2}x-1 \text{ je ass v } -\infty.\\
\text{Podobne priamka } y=\frac{\pi}{2}x-1 \text{ je ass v } \infty.\\
H(f)=\langle 0,\infty).
\end{array}\right]$$



26. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$ a načrtnite jej graf.

$$1)\ D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty),$$
$$f(3-\sqrt{6}) = 0, f(3+\sqrt{6}) = 0,$$
$$\text{spojitá,}\quad \lim_{x\longrightarrow 3^-} \tfrac{x^2-6x+3}{x-3} = \infty, \lim_{x\longrightarrow 3^+} \tfrac{x^2-6x+3}{x-3} = -\infty,$$
priamka $x = 3$ je abs.

2) Platí $-3 \in D(f) \Rightarrow 3 \notin D(f).f$ nie je ani párna,ani nepárna.

3) Nie je periodická. (dva nulové body).

$$4)\ f'(x) = \tfrac{x^2-6x+15}{(x-3)^2},\ \text{ak } x \in (-\infty, 3)\ f'(x) > 0 \nearrow,$$
$$\text{ak } x \in (3, \infty)\ f'(x) > 0 \nearrow .$$

5) Funkcia nemá extrémy.

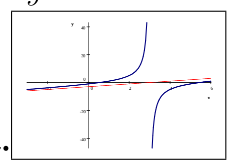
$$6)\ f''(x) = \tfrac{-12}{(x-3)^3},\ \text{ak } x \in (-\infty, 3)\ f''(x) > 0 \cup,$$
$$\text{ak } x \in (3, \infty)\ f(x) < 0 \cap .$$

7) Nemá inflexný bod.

$$8)\ \lim_{x\longrightarrow \pm\infty} \tfrac{x^2-6x+3}{x-3} = \pm\infty.\text{Ass v } -\infty.$$
$$k = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \tfrac{x^2-6x+3}{x(x-3)} = 1,$$
$$q = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \tfrac{x^2-6x+3}{x-3} - x = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \tfrac{-3x+3}{x-3} = -3.$$

Priamka $y = x - 3$ je ass v $-\infty$.

Podobne priamka $y = x - 3$

je ass v ∞.$H(f) = \boldsymbol{R}$. 

27. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln(4 - x^2)$ a načrtnite jej graf.

$$1)\ D(f) = (-2, 2), f(-\sqrt{3}) = 0, f(\sqrt{3}) = 0, \text{spojitá.}$$
$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty. \lim_{x\longrightarrow 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty.$$

Priamky $x = -2$ a $x = 2$ sú abs.

2) Platí $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$.

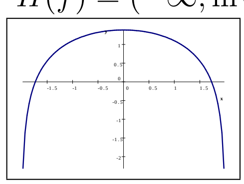
$f(-x) = \ln(4 - (-x)^2) = \ln(4 - x^2) = f(x).f$ je párna.

3) Nie je periodická.

$$4)\ f'(x) = \tfrac{-2x}{4-x^2},\ \text{ak } x \in (-2, 0)\ f'(x) > 0 \nearrow,\ \text{ak } x \in (0, 2)\ f'(x) < 0 \searrow .$$
$$5)\ f(0) = \ln 4 = \max_{x\in D(f)} f(x).$$
$$6)\ f''(x) = \tfrac{-2(x^2+4)}{(4-x^2)^2},\ \text{ak } x \in (-2, 2)\ f''(x) < 0 \cap .$$

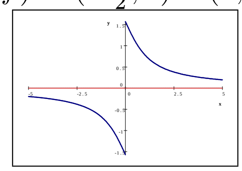
7) Nemá inflexný bod.

8) $H(f) = (-\infty, \ln 4\rangle$.



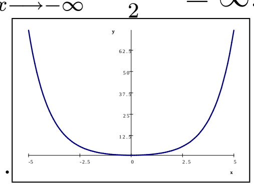
28. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ a načrtnite jej graf.

1) $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, nemá nulové body, spojitá,
$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \longrightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
2) Platí $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$.
$f(-x) = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} x = -f(x)$ f je nepárna.
3) Funkcia je zložená ani vnútorná ani vonkajšia zložka
nie sú periodické, ani f nie je periodická.
4)$f\,'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, ak $x \in (-\infty, 0)$ $f\,'(x) < 0 \searrow$,
ak $x \in (0, \infty)$ $f\,'(x) < 0 \searrow$. 5) Nemá extrémy.
6)$f\,''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, ak $x \in (-\infty, 0)$ $f\,''(x) < 0 \cap$,
ak $x \in (0, \infty)$ $f\,''(x) > 0 \cup$ .7) Nemá inflexný bod.
8) $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = 0$.Priamka $y = 0$ je ass v ∞ aj v $-\infty$.
$H(f) = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.



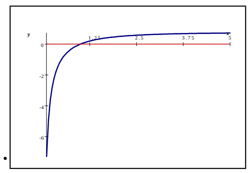
29. Zistite priebeh funkcie $f\,(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ a načrtnite jej graf.

1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, nemá nulový bod, spojitá, nemá abs.
2) Platí $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$.
$f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x = f(x)$.$f$ je párna.
3) Funkcia nie je periodická.
4) $f\,'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{e^{2x}}(e^{2x} - 1)$, ak $x \in (-\infty, 0)$ $f\,'(x) < 0 \searrow$,
ak $x \in (0, \infty)$ $f\,'(x) > 0 \nearrow$.
5) $f(0) = 1 = \min_{x \in D(f)} f(x)$.
6) $f\,''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ak $x \in (-\infty, \infty)$ $f\,''(x) > 0 \cup$.
7) Nemá inflexný bod. 8) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty$.
Ass f v $-\infty$: $k = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty$,
nemá ass v $-\infty$. Podobne $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty$.
Nemá ass v ∞.$H(f) = \langle 1, \infty)$.



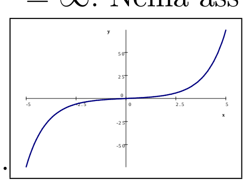
30. Zistite priebeh funkcie $f\,(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\ D(f)=(0,\infty), f(1)=0,\ \text{spojitá.}\\
\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x=-\infty.\ \text{Priamka } x=0 \text{ je abs.}\\
2)\ D(f)=(0,\infty).f\ \text{nie je ani párna, ani nepárna.}\\
3)\ \text{Jeden nulový bod} \implies \text{nie je periodická.}\\
4) f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}},\ \text{ak } x\in(0,e^2)\ \ f'(x)>0\nearrow,\\
\text{ak } x\in(e^2,\infty)\ \ f'(x)<0\searrow.5)\ f(e^2)=\frac{2}{e}=\max f(x).\\
6)\ f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^2\sqrt{x}},\ \text{ak } x\in\left(0,e^{\frac{8}{3}}\right)\ \ f''(x)<0\cap,\\
\text{ak } x\in\left(e^{\frac{8}{3}},\infty\right)\ \ f''(x)>0\cup.\\
7)\ \text{V bode } x=e^{\frac{8}{3}},\ \text{je inflexný bod.}\\
8)\ \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0.\ \text{Priamka } y=0 \text{ je ass v } \infty.\\
H(f)=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right\rangle.
\end{array}\right]$$



31. Zistite priebeh funkcie $f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ a načrtnite jej graf.

$$\left[\begin{array}{c}
1)\ D(f)=\boldsymbol{R}, f(0)=0,\text{spojitá, nemá abs.}\\
2)\ \text{Platí } x\in D(f)\Rightarrow -x\in D(f).\\
f(-x)=\sinh(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\sinh x=-f(x).\ f\ \ \text{je nepárna.}\\
3)\ \text{Funkcia nie je periodická.}\\
4)\ f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x,\ \text{ak } x\in(-\infty,\infty)\ f'(x)>0\nearrow.\\
5)\ \text{Nemá extrém.}\\
6)\ f''(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{e^{2x}}(e^{2x}-1),\\
\text{ak } x\in(-\infty,0)\ f''(x)<0\cap,\ \text{ak } x\in(0,\infty)\ f''(x)>0\cup.\\
7) x=0 \text{ je inflexný bod.}\\
8)\ \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\infty.\ \text{Ass v }\ -\infty:\\
k=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\infty,\ f\ \text{nemá ass v} -\infty.\\
\text{Podobne}\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\infty.\ \text{Nemá ass v } \infty.\\
H(f)=(-\infty,\infty).
\end{array}\right]$$



32. Zistite priebeh funkcie $f(x)=\ln\cos x$ a načrtnite jej graf.

1) $D(f) = \cup_{k\in \boldsymbol{Z}}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), f(0 + 2k\pi) = 0,$ spojitá,

$\lim_{x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi^+} \ln\cos x = -\infty, \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi^-} \ln\cos x = -\infty,$

priamky $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$sú abs.

2) Platí $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$.

$f(-x) = \ln\cos(-x) = \ln\cos x = f(x).f$ je párna.

3) f je periodická s periódou $T = 2\pi$,

stačí ju skúmať na intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

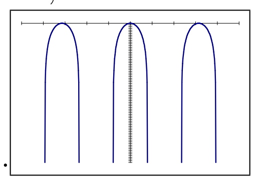
4) $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$, ak $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ $f'(x) > 0 \nearrow$,

ak $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $f'(x) < 0 \searrow$. 5) $f(0) = 0 = \max f(x)$.

6) $f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$, ak $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $f''(x) < 0 \cap$.

7) Nemá inflexný bod.

8) f je periodická, ass nemá.

$H(f) = (-\infty, 0\rangle$. 

Postupnosti a rady reálnych čísel.

Postupnosti.

Definition 412 *Funkciu $f : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, nazývame postupnosťou reálnych čísel.*

Ak položíme $f(n) = a_n$ pre $\forall n \in \boldsymbol{N}$, potom čísla $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ úplne určujú postupnosť. Preto samotnú postupnosť $f : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ neoznačujeme symbolom f, ale používame symbol $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .Jediným hromadným bodom množiny $\boldsymbol{N}$ je ∞. Preto pri postupnostiach má zmysel uvažovať o limite jedine v tomto bode. Z definície limity funkcie máme: prvok $L \in \boldsymbol{R}$ je limitou funkcie $f : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ v bode ∞ vtedy a len vtedy, ak $\forall O_\varepsilon(L)\ \exists O_\delta^\circ(\infty) : f\left(O_\delta^\circ(\infty) \cap \boldsymbol{N}\right) \subset O_\varepsilon(L)$. Potom definícia limity postupnosti v bode ∞ sa dá formulovať takto:

Definition 413 *Číslo $L \in \boldsymbol{R}$ nazývame limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak*

$$\forall O_\varepsilon(L)\ \exists n_0 \in \boldsymbol{N}\colon \forall n \geq n_0\ \ (n \in \boldsymbol{N}) \Longrightarrow a_n \in O_\varepsilon(L),$$

vtedy píšeme

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L.$$

V prípade ak $L \in \boldsymbol{R}$ hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná. V ostatných prípadoch ($L \in \{-\infty,\ \infty\}$, alebo L neexistuje) hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentná.

Ak číslo $L \in \boldsymbol{R}$, definíciu limity postupnosti môžeme prepísať do tvaru:

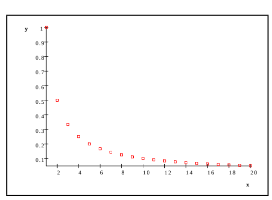
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \boldsymbol{N}\colon \forall n \geq n_0\ \ (n \in \boldsymbol{N}) \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Example 414 *Nech $c \in \boldsymbol{R}$ a nech $a_n = c, \forall n \in \boldsymbol{N}$. Potom $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = c$.*

Solution 415 *Skutočne $\forall \varepsilon > 0$ nech $n_0 \in \boldsymbol{N}$ je ľubovoľné. Pre každé $n \geq n_0$ $(n \in \boldsymbol{N})$ máme $|a_n - L| = |a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, t.j. $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = c$.*$\square$

Example 416 *Zistite, či je postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, alebo divergentná.*

Solution 417 *Načrtnime niekoľko prvých členov postupnosti:*



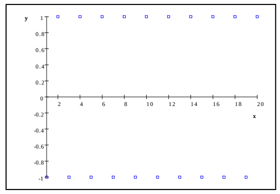
Platí:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, potom $\exists n_0 \in \boldsymbol{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Potom ak $n \in \boldsymbol{N} : n > n_0$ máme $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ teda $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ a postupnosť je konvergentná. $\square$

Example 418 *Ukážte, že $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentná.*

Solution 419 *Načrtnime niekoľko prvých členov postupnosti:*



Platí

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ párne} \\ -1 & n \text{ nepárne} \end{cases}.$$

Sporom ukážeme, že limita neexistuje. Nech limita existuje, označme ju L*. Ak by* $L \geq 0$*, potom* $|(-1)^n - L| \geq 1, \forall n \in \boldsymbol{N}$ *- nepárne. Ak by* $L < 0$*, potom* $|(-1)^n - L| \geq 1, \forall n \in \boldsymbol{N}$ *- párne. Teda pre každé* $0 < \varepsilon \leq 1$ *nenájdeme také* L*, aby spĺňalo definíciu limity. Teda limita neexistuje a* $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *je divergentná.*$\square$

Example 420 *Ukážte, že* $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ *je divergentná postupnosť.*

Solution 421 *Ak* $n \in \boldsymbol{N}$*, potom* $\forall n \geq 1$ *platí* $n^2 \geq n$*, teda ak* $n \geq n_0$*, potom* $n^2 \geq n_0^2 > n_0$*, t.j.* $\lim_{n \longrightarrow \infty} n^2 = \infty$*, t.j. postupnosť* $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ *je divergentná postupnosť.*$\square$

Ohraničené postupnosti.

Definition 422 *Hovoríme, že* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená, ak existuje* $M \in \boldsymbol{R}$ *také, že* $|a_n| \leq M, \forall n \in \boldsymbol{N}$*. V opačnom prípade hovoríme, že postupnosť je neohraničená.*

Theorem 423 *a) Ak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná postupnosť, potom* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená.*
b) Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je neohraničená, potom* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverguje.*

Remark 424 *Veta nehovorí, že ak* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená, že potom je aj konvergentná.*

Monotónne postupnosti.

Definition 425 *Hovoríme, že* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je rastúca ak* $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $a_n < a_{n+1}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je neklesajúca ak* $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je klesajúca ak* $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $a_n > a_{n+1}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca ak* $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $a_n \geq a_{n+1}$*. Rastúce, klesajúce, neklesajúce, nerastúce postupnosti nazývame monotónne postupnosti.*

Theorem 426 *Každá ohraničená monotónna postupnosť je konvergentná.*

Theorem 427 *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sú konvergentné postupnosti, potom aj* $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{ca_n\}_{=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a ak* $\lim_{n \longrightarrow \infty} b_n \neq 0, b_n \neq 0, \ \forall n \in \boldsymbol{N}, n > n_0$*, tak aj* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná postupnosť.*

Pre postupnosti platia všetky vety o limitách funkcií.

Theorem 428 *(Veta o zámene limity postupnosti za limitu funkcie)*

a) Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť a nech* $f : \langle 1, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je funkcia taká, že* $f(n) = a_n$*. Ak* $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = L$*, potom* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná a* $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L$*. Ak* $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$*, potom* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je divergentná a* $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \pm\infty$*. Teda*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x).$$

b) Ak $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = a$ *a funkcia* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$*,* $a \in A$ *je spojitá funkcia v bode* a*, potom* $\lim_{n \longrightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$*.*

Example 429 *Vypočítajte* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+5}$.

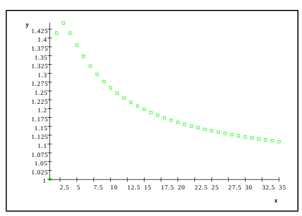
Solution 430 *Limitu postupnosti počítame presne tak isto ako limitu funkcie:* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+5} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}} = \frac{2}{3}.\square$

Example 431 *Nájdite* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$.

Solution 432 *Platí:* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$*.Podľa predchádzajúcej vety máme:* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$*,limitu postupnosti sme zamenili za limitu funkcie, pre ktorú môžme použiť L'Hospitalovo pravidlo.* $\square$

Example 433 *Ukážte, že* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Solution 434 *Načrtnime niekoľko prvých členov postupnosti:*



Použijeme predchádzajúci príklad a dostaneme: $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^0 = 1.\square$

Použitím vety možno ukázať, že $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0,\ r > 0,\ \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1,\ c > 0$.

Remark 435 *Pre postupnosti, ktorých definičným obor je množina celých čísel väčších alebo rovných ako dané celé číslo* m*, (ktoré je obvykle* 0 *alebo* 1*) zostávajú všetky tvrdenia pre postupnosti v platnosti s patričnými modifikáciami.*

Definition 436 *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel a* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je ľubovoľná rastúca postupnosť prirodzených čísel. Postupnosť* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *sa nazýva vybraná postupnosť z postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*.*

Theorem 437 *(Veta o konvergencii vybranej postupnosti) Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť a* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *z nej vybraná postupnosť. Ak* $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L \in \boldsymbol{R}$*, tak aj* $\lim_{k \longrightarrow \infty} a_{n_k} = L$*.*

Remark 438 *Opačné tvrdenie neplatí. Platí negácia predchádzajúcej vety: ak* $\lim_{k\longrightarrow\infty} a_{n_k}$ *neexistuje, potom* $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$ *tiež neexistuje.*

Theorem 439 *Z každej ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná postupnosť.*

Example 440 *Ukážte, že z postupnosti* $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *možno vybrať konvergentnú podpostupnosť.*

Solution 441 *V príklade sme ukázali, že postupnosť* $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *je divergentná. Napriek tomu ak z nej vyberieme podpostupnosti* $\{1\}_{k=1}^{\infty}$ *a* $\{-1\}_{k=1}^{\infty}$, *tieto sú konvergentné.*

Nekonečné číselné rady.

Definition 442 *Nech* $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ *je ľubovoľná postupnosť reálnych čísel. Pre každé prirodzené číslo* j *definujeme*

$$s_j = \sum_{k=0}^{j-1} a_{m+k} = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + ... + a_{m+j-1}$$

nazývame n-tým čiastočným súčtom. Výraz

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+n} + ... \text{ respektíve } \sum_{n=m}^{\infty} a_n,$$

nazývame nekonečným číselným radom. Číslo a_n *nazývame n-tým členom radu. Ak je postupnosť* $\{s_k\}_{k=m}^{\infty}$ *konvergentná (teda má konečnú limitu), tak číslo* $s = \lim_{n\longrightarrow\infty} s_n$ *nazývame súčtom nekonečného radu* $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *a hovoríme, že rad* $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *je konvergentný. Súčet* s *stotožníme s radom* $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

Ak je postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ *divergentná (teda jej limitou je* ∞, $-\infty$, *alebo neexistuje), hovoríme, že rad* $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *je divergentný.*

Example 443 *Ukážte, že* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *je konvergentný rad a nájdite jeho súčet.*

Solution 444 *Platí* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. *Potom* $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \left[1 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + ... + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$

a $\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1$. *Teda daný rad je konvergentný a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.\square$

Theorem 445 *(Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu)*

a) Ak $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$.

b) Ak $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n \neq 0$ *(alebo neexistuje), potom rad* $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Podľa predchádzajúcej vety vieme, že rady $\sum_{n=1}^{\infty} 5$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$sú divergentné rady.

Example 446 *Ukážte, že rad* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *konverguje a jeho súčet je číslo* e.

Solution 447 *Chceme ukázať, že* $\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right]$ *existuje a rovná sa číslu e.Z Taylorovej vety pre funkciu* $f(x) = e^x$ *na intervale* $\langle 0,1\rangle$ *máme:* $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\Theta}}{(n+1)!}$,*kde* $\Theta \in O_{\delta}(0)$, $0 < \Theta < 1$. *Okrem toho* $e^{\Theta} \leq e < 3$. *Pretože* $\forall n \geq 3$ *máme* $0 \leq \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{n}$ *odkiaľ* $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right] = e.\square$

Example 448 *Ukážte,že* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *diverguje.*

Solution 449 *Ukážeme, že platí* $s_{2^k} \geq 1+\frac{k}{2}, \forall k.$

$s_{2^1} = 1+\frac{1}{2},$

$s_{2^2} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+\frac{2}{2},$

Tak ukážeme, že

$s_{2^k} \geq 1+\frac{k}{2}, \forall k.$

Pretože $\lim_{k\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{k}{2}\right) = \infty$, *tak je daný rad divergentný.*$\square$

Geometrické rady.

Definition 450 *Geometrický rad je rad tvaru* $\sum_{n=m}^{\infty} cr^n$, *kde* $c, r \in \boldsymbol{R}$ *sú konštanty a* $c \neq 0$ *a* $m \geq 0$.

Theorem 451 *Nech r je ľubovoľné číslo a nech* $c \neq 0$, $m \geq 0$. *Potom geometrický rad* $\sum_{n=m}^{\infty} cr^n$*konverguje vtedy a len vtedy ak* $|r| < 1$, *jeho súčet je* $\sum_{n=m}^{\infty} cr^n = \frac{cr^m}{1-r}$.

Example 452 *Nájdite súčet radu* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Solution 453 *Daný rad je geometrický rad,* $c = 1$, $r = \frac{1}{4}$. *Tak* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.\square$

Theorem 454 *a) Ak* $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ *konvergujú, tak rad* $\sum_{n=m}^{\infty}(a_n+b_n)$ *tiež konverguje a platí:*

$$\sum_{n=m}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n,$$

b) Ak $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $c \in \boldsymbol{R}$, *tak rad* $\sum_{n=m}^{\infty}(ca_n)$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=m}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

Rady s nezápornými členmi.

V tejto časti ukážeme ako sa dá zistiť, či daný rad s nezápornými členmi konverguje, alebo diverguje.

> Na určovanie konvergencie radov typu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, kde $p > 0$ je vhodné integrálne kritérium. To neuvádzame, ale uvedieme nasledujúce tvrdenie.

Remark 455 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *konverguje vtedy a len vtedy, ak* $p > 1$ *a diverguje, ak* $0 < p < 1$.

Porovnávacie kritérium.

Theorem 456 *(Porovnávacie-majorantné kritérium)*

a) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje a* $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, *potom aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

b) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje a* $0 \leq b_n \leq a_n$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$, *potom aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Example 457 *Ukážme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ *konverguje.*

Solution 458 *Platí* $2^n < 2^n + 1 \Longrightarrow \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$.*a pretože rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *konverguje (geometrický rad s kvocientom* $\frac{1}{2}$*), tak aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ *konverguje podľa porovnávacieho kritéria.*$\square$ *Podobne ak využijeme nerovnicu* $\frac{1}{2^n-1} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$, *ukážeme že aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ *konverguje.*

Example 459 *Zistime, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ *konverguje, alebo diverguje.*

Solution 460 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ *diverguje* ($p = \frac{1}{2}$)*, podľa integrálneho kritéria. Platí* $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ *a pretože rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ *diverguje* ($p = \frac{1}{2}$)*, tak podľa porovnávacieho kritéria aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ *diverguje.* $\square$

Theorem 461 *(Limitné porovnávacie kritérium) Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú rady s nezápornými členmi,* $b_n > 0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. *Nech*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \text{ kde } L \in (0, \infty).$$

a) Ak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, tak aj* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

b) Ak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje, tak aj* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Example 462 *Zistime, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ *konverguje alebo diverguje.*

Solution 463 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverguje. Platí* $a_n = \sin\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $\quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$,*pretože rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverguje, tak podľa limitného porovnávacieho kritéria aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ *diverguje.* $\square$

Theorem 464 *(D'Alembertovo podielové kritérium) Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi a nech* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, *(možné aj* ∞*).*

a) Ak $0 \leq r < 1$, *potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

b) Ak $r > 1$, *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Ak $r = 1$ *kritérium nič nehovorí.*

Example 465 *Zistime, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ *konverguje alebo diverguje.*

Solution 466 *Máme* $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, $r = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$,*teda* $r = 0 < 1$ *a rad podľa podielového kritéria konverguje.* $\square$

Example 467 *Zistime, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ *konverguje alebo diverguje.*

Solution 468 *Máme* $a_n = \frac{2^n}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$, $r = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 2$,*teda* $r > 1$ *a rad podľa podielového kritéria diverguje.* $\square$

Cauchyho odmocninové kritérium.

Theorem 469 *(Cauchyho odmocninové kritérium) Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi a nech* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, *(možné aj* ∞*).*

a) Ak $0 \leq r < 1$, *potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

b) Ak $r > 1$, *rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Ak $r = 1$ *kritérium nič nehovorí.*

Example 470 *Zistime, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000^n}$ *konverguje, alebo diverguje.*

Solution 471 *Máme* $a_n = \frac{n}{1000^n}$, $r = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{1000^n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1000} = \frac{1}{1000} < 1$,*teda rad podľa odmocninového kritéria konverguje.* □

Example 472 *Aplikujme D' Alembertovo podielové kritérium a Cauchyho odmocninové kritérium aby sme zistili, či rady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konvergujú alebo divergujú .*

Solution 473 *Ukázali sme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverguje a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konverguje. Použitím D' Alembertovho podielového kritéria pre divergentntý rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *dostaneme:* $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $r = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,*Použitím Cauchyho odmocninového kritéria pre tento rad dostaneme:* $a_n = \frac{1}{n}$, $r = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$.

Použitím D' Alembertovho podielového kritéria pre konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *dostaneme:* $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, $r = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$.

Použitím Cauchyho odmocninového kritéria pre tento rad dostaneme: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $r = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.*Tak sme ukázali, že ak pri použití D' Alembertovho podielového kritéria alebo Cauchyho odmocninového kritéria dostaneme* $r = 1$, *tieto kritériá nehovoria nič o konvergencii daných radov.* □

Rady so striedavými znamienkami a kritériá konvergencie pre rady s ľubovoľnými členmi.

Ak sú členy radu striedavo s kladným a záporným znamienkom, tieto rady sa nazývajú alternujúce rady. Napríklad rad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^n = 2 - 4 + 8 - 16 + ...,$$

alebo rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ...$$

Theorem 474 *(Leibnizovo kritérium konvergencie) Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca postupnosť taká, že* $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$. *Potom rady* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konvergujú.*

Example 475 *Ukážte, že alternujúci harmonický rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *konverguje.*

Solution 476 *Máme* $a_n = \frac{1}{n}$*, teda* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je klesajúca, nezáporná postupnosť, taká, že* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0$*. Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *konverguje.* $\square$

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, nezáporná postupnosť a $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$, potom zaujímavou vlastnosťou oboch radov $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je, že chyba pri aproximácii oboch radov čiastočnými súčtami $\sum_{n=1}^{k} (-1)^n a_n$ a $\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} a_n$ nie je väčšia ako a_{k+1}. Dôkaz tohto tvrdenia ponecháme čitateľovi.

Absolútna a relatívna konvergencia.

Dosiaľ sme sa stretli iba s kritériami, ktoré nemôžeme priamo použiť na rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde a_n sú záporné, alebo niektoré členy sú kladné, niektoré sú záporné, ... Všetky doteraz prezentované kritériá možno použiť na určenie konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pretože tento má už nezáporné členy.

Theorem 477 *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konverguje, potom aj* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Example 478 *Ukážte, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ *konverguje.*

Solution 479 *Máme* $\left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ *a pretože rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konverguje podľa integrálneho kritéria* $(p = 2)$*, tak aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ *konverguje.* $\square$

Example 480 *Zistite, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^3}$ *konverguje, alebo diverguje.*

Solution 481 *Máme* $\left|\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbf{N}$ *pretože rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *konverguje podľa integrálneho kritéria* $(p = 3)$*, tak aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^3}$ *konverguje.* $\square$

Definition 482 *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konverguje, hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne. Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverguje, hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relatívne.*

Theorem 483 *(Zovšeobecnené kritériá konvergencie) Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad.*

a) Porovnávacie kritérium. Ak $|a_n| \leq |b_n|, \forall n \in \mathbf{N}$ *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *konverguje, potom aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (absolútne).*

b) Limitné porovnávacie kritérium. Ak $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L$*, kde* $L > 0$ *a ak* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *konverguje, tak aj* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (absolútne).*

c) D' Alembertovo kritérium. Ak $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}$ *a nech* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ *(možné aj* ∞*), ak* $r < 1$*, potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (absolútne). Ak* $r > 1$*, rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje. Ak* $r = 1$*, kritérium nič nehovorí.*

d) Cauchyho kritérium. Nech $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ *(možné aj* ∞*), ak* $r < 1$*, potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje (absolútne). Ak* $r > 1$*, rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje. Ak* $r = 1$*, kritérium nič nehovorí.*

Example 484 *Ukážte, že* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *konverguje absolútne pre* $|x| < 1$*, konverguje relatívne pre* $x = -1$ *a diverguje pre* $x = 1$ *a* $|x| > 1$*.*

Solution 485 *Ak* $x = 0$ *rad konverguje. Ak* $x \neq 0$ *použijeme D' Alembertovo zovšeobecnené kritérium a dostaneme*

$$a_n = \frac{x^n}{n},\ a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = |x| \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n}{n+1} = |x|\,.$$

Ak $|x| < 1$ *rad konverguje, ak* $|x| > 1$ *rad diverguje. Pre* $|x| = 1$ *kritérium nič nehovorí, preto tento prípad musíme skúmať osobitne. Ak* $x = 1$ *je to harmonický rad, ktorý diverguje, pre* $x = -1$ *je to alternujúci harmonický rad, ktorý konverguje relatívne.* $\square$

Example 486 *Ukážte, že* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$ *konverguje absolútne pre* $|x| < 1$*, konverguje relatívne pre* $|x| = 1$ *a diverguje pre* $|x| > 1$.

Solution 487 *Ak* $x = 0$ *rad konverguje. Ak* $x \neq 0$ *použijeme D' Alembertovo kritérium a dostaneme*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1},\ a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)}x^{2n+3},$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)}x^{2n+3}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}}\right| = |x|^2 \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = |x|^2\,.$$

Ak $|x| < 1$ *rad konverguje, ak* $|x| > 1$ *rad diverguje. Pre* $x = 1$ *máme* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$*, pre* $x = -1$ *je to rad* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)}$*. Oba rady konvergujú podľa Leibnitzovho kritéria. Teda rad konverguje pre* $x \in \langle -1, 1\rangle$ $\square$

Theorem 488 *Nech je daná postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Ak platí* $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$*, alebo* $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = r$*,* $r < 1$*, potom* $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$.

Example 489 *Ukážte, že* $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{x^n}{n!} = 0,\ \forall x \in \boldsymbol{R}$.

Solution 490 *Ak* $x = 0$ *je tvrdenie jasné. Ak* $x \neq 0$ *označme* $a_n = \frac{x^n}{n!}$*, potom*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x| \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1,\ \forall x \in \boldsymbol{R}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{x^n}{n!} = 0,\ \forall x \in \boldsymbol{R}.\square$$

Cvičenia.

1. Zistite, či postupnosť $\left\{\frac{3^n+3}{1-4.2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

$$\left[\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3}{1-4.2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1+\frac{1}{3^{n-1}}}{\frac{1}{2^n}-4} = -\infty. \\ \text{Diverguje.} \end{array}\right]$$

2. Zistite, či postupnosť $\left\{\sqrt{1+n^2}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

$\left[\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+n^2}-n\right) = 0.\ \right]$ Konverguje.

3. Zistite, či postupnosť $\left\{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

$$\left[\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right) = \frac{1}{2}. \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

4. Zistite, či postupnosť $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

$$\left[\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}. \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

5. Zistite, či postupnosť $\left\{\sqrt[n]{5n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, alebo diverguje.

$$\left[\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5n}\right) = 1. \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

6. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Nájdite } n\text{-tý čiastočný súčet.} \\ \text{Máme}: \frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+4)}\right), \\ s_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right), \\ s_2 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right], \\ s_3 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\right], \\ s_4 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)\right], \\ ..., \\ s_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right], \\ \lim_{n\to\infty}s_n = \frac{13}{36}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{13}{36}. \end{array}\right]$$

7. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+2}}\right)$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Nájdite } n\text{-tý čiastočný súčet.} \\ s_n = e+e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{1}{n+2}}, \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+2}}\right) = e+e^{\frac{1}{2}}-2. \end{array}\right]$$

8. Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Nájdite } n\text{-tý čiastočný súčet.} \\ s_1 = \ln 2, \\ s_2 = \ln 2+\ln\frac{3}{2} = \ln 3, \\ ..., \\ s_n = \ln(n+1), \lim_{n\to\infty}s_n = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty. \\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ diverguje.} \end{array}\right]$$

9. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+5}$.

   [Porovnávacie kritérium. Konverguje.]

10. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Limitné porovnávacie kritérium.} \\ \text{Rad } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ konverguje } (p = \frac{3}{2} > 1). \\ \text{Platí : } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1 > 0 \text{ Konverguje.} \end{array}\right]$$

11. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Limitné porovnávacie kritérium.} \\ \text{Diverguje.} \end{array}\right]$$

12. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Limitné porovnávacie kritérium.} \\ \text{Diverguje.} \end{array}\right]$$

13. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Limitné porovnávacie kritérium.} \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

14. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Podielové kritérium.} \\ \text{Diverguje.} \end{array}\right]$$

15. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Podielové kritérium.} \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

16. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Podielové kritérium.} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{2\pi}{2^{n+1}}} = \\ = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1. \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

17. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n+1}}$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Podielové kritérium.} \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

18. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^n$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Odmocninové kritérium.} \\ \text{Konverguje.} \end{array}\right]$$

19. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n$.

$\left[\begin{array}{c}\text{Odmocninové kritérium.}\\ \text{Diverguje.}\end{array}\right]$

20. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$.

$\left[\begin{array}{c}\text{Odmocninové kritérium.}\\ \text{Konverguje.}\end{array}\right]$

21. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(2n+1)}$.

$\left[\begin{array}{c}\text{Kritérium pre rady so striedavými znamienkami.}\\ a_n = \frac{1}{\ln 2n+1} > \frac{1}{\ln 2n+3} = a_{n+1},\\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln 2n+1} = 0.\\ \text{Konverguje.}\end{array}\right]$

22. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$.

$\left[\begin{array}{c}\text{Kritérium pre rady so striedavými}\\ \text{znamienkami. Konverguje.}\end{array}\right]$

23. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

$\left[\begin{array}{c}\text{Podľa kritéria pre rady so striedavými znamienkami}\\ \text{rad konverguje. Rad } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \text{ diverguje podľa}\\ \text{porovnávacieho kritéria. To znamená, že rad}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ konverguje relatívne.}\end{array}\right]$

24. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

[Konverguje absolútne.]

25. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{Rad diverguje.}\\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1.\end{array}\right]$

26. Zistite, či je rad absolútne, alebo len relatívne konvergentný $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$.

[Rad absolútne konverguje.]

BIBLIOGRAPHY

[1] Galanová, J., Gatial, J., Kaprálik, P.: Lineárna algebra, STU Bratislava, 2002

[2] Marko Ľ.: Matematická analýza I, online, 2000, http://www.fei.stuba.sk/~marko

[3] Stroud,K.A.: Engineering Mathematics, Macmillan Presss LTD, Hong Kong, 1993

[4] Šulka, R., Moravský, L., Satko, L.: Matematická analýza I, Alfa, SNTL, Bratislava 1986

[5] Glyn, J.: Modern engineering mathematics, Addison Wesley, 2008