

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

ALGEBRAICKÝ TVAR KOMPLEXNÉHO ČÍSLA

Množina komplexných čísel: $C = \{a + ib, a, b \in R\}$,
 $z = a + ib$ sa nazýva algebraický tvar komplexného čísla z ,
 $a = \operatorname{Re}(z)$ sa nazýva reálna časť z , $b = \operatorname{Im}(z)$ sa nazýva imaginárna časť z ,
 $\bar{z} = a - ib$ sa nazýva komplexne združené číslo k číslu z .

Operácie s komplexnými číslami

$$\begin{aligned}\forall a, b, c, d, \alpha \in R: \quad & (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \\ & \alpha(a + ib) = \alpha a + i\alpha b \\ & (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \\ & \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad ab \neq 0.\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad i^n = i^k, \quad n = 4l + k, \quad n \in N, l \in N \cup \{0\}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Vlastnosti komplexne združených čísel

$\forall z, w \in C$ platí:

$$\begin{array}{ll} 1. & \overline{(\bar{z})} = z, \\ 2. & \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \\ 3. & \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \\ 4. & \text{ak } w \neq 0, \text{ tak } \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \end{array}$$

$$\forall z \in C \text{ platí: } a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Absolútna hodnota komplexného čísla: $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Vlastnosti absolútnej hodnoty

$$\forall z, w \in C: \quad \begin{array}{ll} 1. & |z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{trojuholníková nerovnosť}) \\ 2. & |\bar{z}| = |z| \\ 3. & z\bar{z} = |z|^2 \\ 4. & |zw| = |z||w|. \end{array}$$

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÉHO ČÍSLA $z \in C \setminus \{0\}$

$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $\varphi \in (-\pi, \pi)$ sa nazýva argument komplexného čísla.

Moivreov vzorec

Nech $z \in C \setminus \{0\}$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Potom $\forall n \in N$ platí:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Riešenie binomickej rovnice $z^n = c$, $c \in C \setminus \{0\}$, $n \in N$.

Ak $c = |c|(\cos \psi + i \sin \psi)$, tak binomická rovnica má práve n riešení:

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{\psi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\psi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

POLYNÓMY

Definícia. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ ($\in C$). Zobrazenie, ktoré $\forall x \in R$ ($x \in C$) priradí číslo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ sa nazýva polynóm nad R (nad C) s koeficientami $a_0, a_1, \dots, a_n$. Ak $a_n \neq 0$, tak $n \in N \cup \{0\}$ sa nazýva stupeň polynómu f , označujeme $\text{st } f = n$. Ak $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, tak f sa nazýva nulový polynóm a $\text{st } f = -\infty$.

Operácie s polynómami

Nech f, g sú polynómy nad R (nad C). Potom aj $f \pm g$, $f \cdot g$, αf sú polynómy nad R (nad C) a platí:

$$\text{st}(f \pm g) \leq \max\{\text{st } f, \text{st } g\}$$

$$\text{st}(f \cdot g) = \text{st } f + \text{st } g$$

$$\text{st}(\alpha f) = \text{st } f, \quad \forall \alpha \in R \setminus \{0\} \quad (\alpha \in C \setminus \{0\}).$$

Rovnosť dvoch polynómov – rovnosť koeficientov pri rovnakých mocninách.

$P(R)$ ($P(C)$) – množina všetkých polynómov nad R (nad C).

Veta (Delenie polynómu polynómom).

$\forall f, g \in P(C) \quad \exists q, r \in P(C): f = q \cdot g + r, \quad \text{st } r < \text{st } g$.

Definícia. Nech f je polynóm nad C . Číslo $c \in C$ sa nazýva koreň polynómu f , ak $f(c) = 0$.

Základná veta algebry. Každý polynóm aspoň prvého stupňa má koreň v C .

Veta. Nech f je polynóm nad C a nech $c \in C$. Potom zvyšok po delení polynómu f polynómom g , $g(x) = x - c$, sa rovná hodnote $f(c)$.

Dôkaz. Ak delíme polynóm f polynómom g , $\text{st } g = 1$, tak zvyšok r má stupeň menší ako stupeň polynómu g , t.j. buď je $\text{st } r = 0$ alebo $\text{st } r = -\infty$. Teda zvyšok je konštantou.

Platí: $\exists q \in P(C) \quad \exists r \in C: \forall x \in C: f(x) = q(x)(x - c) + r, \quad (\text{st } q = \text{st } f - 1)$.

Potom pre $x = c$ platí $f(c) = 0 + r$.

Dôsledok. Ak c je koreňom polynómu f , tak polynóm g , $g(x) = x - c$, delí polynóm f bez zvyšku.

HORNEROVA SCHÉMA

Schéma zjednodušuje delenie polynómu lineárnym polynómom v tvare $g(x) = x - c$. Princíp schémy je vysvetlený na delení polynómu 3. stupňa. Nech

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Po vydelení polynómom $g(x) = x - c$ dostaneme $f(x) = q(x)(x - c) + f(c)$, kde $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. V nasledujúcej tabuľke 3. riadok vznikne súčtom 1. a 2. riadku.

$f(x)$	a_3	a_2	a_1	a_0
c		cb_2	cb_1	cb_0
$q(x)$	$b_2 = a_3$	$b_1 = a_2 + cb_2$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Definícia. Polynóm f nad R (nad C) stupňa aspoň 1 sa nazýva ireducibilný, ak sa nedá zapísať ako súčin dvoch polynómov aspoň 1. stupňa.

Veta. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ a nech číslo $c = a + ib$, $a, b \in R$, je koreň polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Potom aj komplexne združené číslo $\bar{c}$ je koreňom polynómu f .

Definícia. Nech c je koreň polynómu f . Hovoríme, že c je koreň násobnosti $k \in N$, ak $f(x) = (x - c)^k g(x)$, pričom platí $g(c) \neq 0$.

Veta. Každý polynóm $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, $n \in N$, $a_n \neq 0$ sa dá rozložiť na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R , nad C .

Rozklad nad C : $f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m}$, $m \in N$,

kde $c_1, c_2, \dots, c_m \in C$ sú korene polynómu f , $k_1, k_2, \dots, k_m \in N$ sú násobnosti koreňov, pričom platí $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Rozklad nad R :

$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$, $r, s \in N \cup \{0\}$, kde $c_1, c_2, \dots, c_r \in R$ sú korene polynómu f , $k_1, k_2, \dots, k_r \in N$ sú násobnosti koreňov, $p_i, q_i \in R$, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, s$, pričom platí $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_s) = n$.

Veta (O racionálnych koreňoch polynómu). Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in Z$, $a_n \neq 0$. Nech $\frac{p}{q}$ je racionálne číslo v základnom tvare. Ak $\frac{p}{q}$ je koreňom polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, tak p je deliteľom čísla a_0 a q je deliteľom a_n .

RACIONÁLNE FUNKCIE

Definícia. Nech f, g sú polynómy nad R (nad C) a nech $g \neq 0$. Potom $R = \frac{f}{g}$ sa nazýva racionálna funkcia nad R (nad C). Ak $st f < st g$, tak R sa nazýva rýdzo racionálna funkcia.

Definícia.

1. Elementárnym zlomkom nad C sa nazýva rýdzo racionálna funkcia

$$R(x) = \frac{A}{(x - c)^n}, \quad A, c \in C, \quad n \in N.$$

2. Elementárnym zlomkom nad R sa nazývajú rýdzo racionálne funkcie

$$R_1(x) = \frac{A}{(x - c)^n}, \quad A, c \in R, \quad n \in N,$$

$$R_2(x) = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}, \quad B, C, p, q \in R, \quad n \in N, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Veta. Každá racionálna funkcia sa dá jednoznačne zapísať (až na poradie sčítan-cov) ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad R (nad C).

Postup rozkladu racionálnej funkcie na elementárne zlomky nad R (nad C)

1. Ak $\text{st } f \geq \text{st } g$, tak vydelíme polynóm f polynómom g so zvyškom r , $R = h + \frac{r}{g}$.
2. Nájdeme rozklad polynómu g na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R (nad C).
3. Rýdzio racionálnu funkciu $\frac{r}{g}$ zapíšeme ako súčet elementárnych zlomkov s neurčitými koeficientami (počet koeficientov je rovný stupňu polynómu g):

Polynóm
v rozklade g

Elementárne zlomky

$$(x-c)^k \longrightarrow \frac{A_1}{x-c} + \frac{A_2}{(x-c)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-c)^k} \quad \text{nad } R \text{ (nad } C)$$

$$(x^2+px+q)^k \longrightarrow \frac{B_1+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_k+C_k}{(x^2+px+q)^k} \quad \text{nad } R$$

4. Vypočítame koeficienty.

LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ PRVKOV R^n , C^n

$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R, i = 1, \dots, n\}$ — množina všetkých usporiadaných n -tíc nad R .

$C^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in C, i = 1, \dots, n\}$ — množina všetkých usporiadaných n -tíc nad C .

Definícia (Súčet a násobok skalárom).

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n (\in C^n)$, $\alpha \in R (\in C)$. Potom

$$(1) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$(2) \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Definícia (Lineárna kombinácia prvkov). Nech $k \in N$, $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$.

Ak $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in C: \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$, tak $\mathbf{x}$ sa nazýva lineárnou kombináciou prvkov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$.

Definícia. Prvky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$ sa nazývajú lineárne nezávislé, ak majú nasledujúcu vlastnosť: ak $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, tak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Prvky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$ sa nazývajú lineárne závislé, ak aspoň jeden koeficient je nenulový, t.j. $\exists \alpha_i \neq 0$.

Veta. Prvky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden prvok je lineárnou kombináciou ostatných prvkov.

SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

Definícia matice. Tabuľka reálnych (komplexných čísel)

$$a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ sa}$$

nazýva matica typu $m \times n$ nad reálnymi (komplexnými) číslami. Usporiadaná n -tica $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ sa nazýva i -tý riadok matice, $i = 1, 2, \dots, m$. Usporiadaná

$$m\text{-tica } S_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ sa nazýva } j\text{-tý stĺpec matice, } j = 1, 2, \dots, n. \text{ Ak } m = n, \text{ tak}$$

A sa nazýva štvorcová matica.

$R^{m \times n}$ — množina všetkých matíc typu $m \times n$ nad R .

$C^{m \times n}$ — množina všetkých matíc typu $m \times n$ nad C .

$$\text{Formy zápisu matice: } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{ij})_n^m = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_n).$$

RIEŠENIE SÚSTAV LINEÁRNYCH ROVNÍC

Sústava m rovníc s n neznámymi $m, n \in N, m \geq 1, n > 1$:

$$(S_A) \quad \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$a_{ij}, b_j \in R(C); i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Riešiť sústavu lineárnych rovníc znamená nájsť všetky usporiadané n -tice reálnych (komplexných) čísel, ktoré po dosadení za premenné $x_1, x_2, \dots, x_n$ vyhovujú rovniciam.

Zápis sústavy

A sa nazýva matica sústavy, A' sa nazýva rozšírená matica sústavy.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A' = A|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Definícia. Nech $A \in C^{m \times n}$. Vedúcim prvkom riadku $R_i, i \in \{1, \dots, m\}$ je prvý nenulový prvok v riadku, t.j. ak $a_{ij} \neq 0$, tak $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{i,j-1} = 0$. Ak $R_i = \mathbf{0}$, tak nemá vedúci prvok.

Definícia stupňovitej matice. Matica $A \in C^{m \times n}$ sa nazýva stupňovitá, ak platí:

1. Ak $R_i = \mathbf{0}$, tak $R_{i+1} = \mathbf{0}, i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$.
2. Ak pre $i \in \{1, \dots, m-1\}$ je vedúci prvok riadku R_i v stĺpci S_j , tak buď $R_{i+1} = \mathbf{0}$ alebo má vedúci prvok v stĺpci $S_k, k > j, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Definícia redukovanej stupňovitej matice. Nech $A \in C^{m \times n}$ je stupňovitá matica. A sa nazýva redukovaná stupňovitá matica, ak platí:

1. Každý vedúci prvok riadku je rovný 1.
2. Ak sa v nejakom stĺpci nachádza vedúci prvok riadku, tak všetky ostatné prvky v danom stĺpci sú nulové.

Definícia (ERO). Elementárnou riadkovou operáciou na matici $A \in C^{m \times n}$ sa nazýva:

1. vzájomná výmena dvoch riadkov ($R_i \longleftrightarrow R_j$),
2. vynásobenie riadku nenulovým číslom ($R_i \longrightarrow \alpha R_i$, $\alpha \in C \setminus \{0\}$),
3. pripočítanie násobku nejakého riadku k inému riadku ($R_i \longrightarrow R_i + \alpha R_j$, $i \neq j$).

Veta. Každá matica $A \in C^{m \times n}$ sa dá pomocou konečného počtu elementárnych riadkových operácií upraviť na stupňovitú, resp. jednoznačne určenú redukovanú stupňovitú maticu.

Definícia. Ak $B \in C^{m \times n}$ je matica, ktorá vznikne z matice $A \in C^{m \times n}$ použitím konečného počtu ERO, tak hovoríme, že matice A , B sú ekvivalentné, označujeme $A \sim B$.

Veta. Ak $A' \in C^{m \times (n+1)}$ je rozšírenou maticou sústavy (S_A) a $B' \in C^{m \times (n+1)}$ je ekvivalentná s maticou A' , tak B' je rozšírenou maticou sústavy (S_B) , pričom množiny riešení (S_A) , (S_B) sú totožné.

Definícia (Hodnosť matice). Maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice $A \in C^{m \times n}$ sa nazýva hodnosť matice, označujeme $h(A)$.

Poznámka. Ak stupňovitá matica B je ekvivalentná s maticou A , tak hodnosť matice A je počet nenulových riadkov matice B .

Frobéniova veta. Sústava lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.

Veta (matice $\longleftrightarrow$ sústavy). Nech $A \in C^{m \times n}$ je matica sústavy, $A' \in C^{m \times (n+1)}$ je rozšírená matica sústavy lineárnych rovníc (S_A) . Potom platí:

1. Ak $h(A) \neq h(A')$, tak sústava nemá riešenie.
2. Ak $h(A) = h(A') = n$, tak sústava má práve jedno riešenie.
3. Ak $h(A) = h(A') = k < n$, tak sústava má nekonečne veľa riešení, na určenie množiny riešení potrebujeme $n - k$ parametrov.

Poznámka. Ak $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tak (S) sa nazýva homogénna sústava, ak $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, tak (S) sa nazýva nehomogénna sústava.

Dôsledok. Každá homogénna sústava lineárnych rovníc má aspoň jedno riešenie.

MATICOVÁ ALGEBRA

Definícia. Nech $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $A, B \in C^{m \times n}$, $\alpha \in C$. Potom

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad \alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Definícia. Nech $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq k}} \in C^{m \times k}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \in C^{k \times n}$. Potom súčin matic $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in C^{m \times n}$ je definovaný:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Vlastnosti operácií s maticami.

$\forall A, B, D \in C^{m \times n}$, $\forall \alpha, \beta \in C$ platí:

$$\begin{array}{ll} a) & A + B = B + A \\ b) & (A + B) + D = A + (B + D) \end{array} \quad \begin{array}{ll} c) & \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \\ d) & (\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta \cdot A) \end{array}$$

$\forall A \in C^{m \times k}$, $\forall B \in C^{k \times l}$, $\forall D \in C^{l \times n}$ platí: $(A \cdot B) \cdot D = A \cdot (B \cdot D)$.

$\forall A, B \in C^{m \times k}$, $\forall D \in C^{k \times n}$, $\forall E \in C^{l \times m}$ platí:

$$(A + B)D = AD + BD, \quad E(A + B) = EA + EB.$$

Poznámka. Komutatívny zákon pre súčin matic neplatí.

Transponovaná matica $A^T = (a_{ji}) \in C^{n \times m}$ k matici $A = (a_{ij}) \in C^{m \times n}$.

Jednotková matica $I_n = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

ŠTVORCOVÉ MATICE

Definícia. Matica $A \in C^{n \times n}$ sa nazýva regulárna, ak existuje matica $B \in C^{n \times n}$ taká, že $AB = BA = I_n$.

Definícia. Ak $A, B \in C^{n \times n}$ a platí $AB = BA = I_n$, tak matica B sa nazýva inverzná matica k matici A , označujeme $B = A^{-1}$.

Ako nájsť inverznú maticu k matici $A \in C^{2 \times 2}$:

Nech $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Platí $AA^{-1} = I_2$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{riešenie 2 sústav súčasne} \implies$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim_{ERO} \dots \sim_{ERO} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{array} \right).$$

Postup pri hľadaní inverznej matice $(A|I_n) \sim_{ERO} \dots \sim_{ERO} (I_n|A^{-1})$.

DETERMINANTY

Definícia. Nech $n \in N$, $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, nech A_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, je matica, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadka R_i a stĺpca S_j . Determinantom matice A sa nazýva číslo $\det A = |A|$ definované nasledovne:

1. Ak $n = 1$, tak $\det A = a_{11}$.

2. Ak $n > 1$, tak $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$.

Veta. Nech $A \in C^{n \times n}$, $n > 1$. Potom platí:

1. Ak matica B vznikne z matice A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $\det B = -\det A$, $(A_{R_i \leftrightarrow R_j} \sim B, i \neq j)$.
2. Ak matica B vznikne z matice A vynásobením riadka číslom $\alpha \in C$, tak $\det B = \alpha \det A$, $(A_{\alpha R_i \rightarrow R_i} \sim B)$.
3. Ak matica B vznikne z matice A pripočítaním násobku nejakého riadku k inému riadku, tak $\det B = \det A$, $(A_{R_i + \alpha R_j \rightarrow R_i} \sim B, i \neq j)$.

Označenie. Ak $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ sa nazýva algebraický doplnok k prvku a_{ij} .

Veta. Nech $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, $n > 1$. Pre $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí:

- (a) $\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{ik}$ (rozvoj podľa i -teho riadku).
- (b) $\det A = \sum_{l=1}^n a_{lj} \tilde{a}_{lj}$ (rozvoj podľa j -teho stĺpca).

Definícia. Matica $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ sa nazýva

- (a) horná trojuholníková, ak $\forall i, j = 1, \dots, n$ platí: ak $i > j$, tak $a_{ij} = 0$,
- (b) dolná trojuholníková, ak $\forall i, j = 1, \dots, n$ platí: ak $i < j$, tak $a_{ij} = 0$,
- (c) diagonálna, ak $\forall i, j = 1, \dots, n$ platí: ak $i \neq j$, tak $a_{ij} = 0$.

Veta. Ak $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ je trojuholníková matica, tak $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Veta (Cramerovo pravidlo). Ak matica $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi je regulárna, tak existuje jediné riešenie

$$\mathbf{x} = \left(\frac{D_1}{|A|}, \frac{D_2}{|A|}, \dots, \frac{D_n}{|A|} \right), \quad D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definícia. Nech $A \in C^{n \times n}$, $\tilde{a}_{ij}$ je algebraický doplnok k prvku a_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$\text{Matica } \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})^T, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

sa nazýva adjungovaná matica k matici A .

Veta. Nech $\tilde{A} \in C^{n \times n}$ je adjungovaná matica k matici $A \in C^{n \times n}$. Potom platí: $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$. Ak $\det A \neq 0$, tak $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$.

Veta. Nech $A \in C^{n \times n}$. Potom platí:

- (a) $h(A) = n \iff \det A \neq 0$.
- (b) $h(A) = n \iff \exists A^{-1}$.

GEOMETRIA

Vektory

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3, \alpha \in R: \quad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad \alpha \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3).$$

Definícia. Nech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Číslo $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ sa nazýva norma (dĺžka) vektora $\vec{u}$. Ak $\|\vec{u}\| = 1$, tak $\vec{u}$ sa nazýva jednotkový vektor.

$$\begin{aligned} \text{Vlastnosti normy: } \forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3, \alpha \in R: \quad & \|\vec{u}\| \geq 0, \quad \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \\ & \|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\| \\ & \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

Veta.

1. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé $\Leftrightarrow \exists \alpha \in R: \vec{v} = \alpha \vec{u}$.

(Dajú sa umiestniť na jednu priamku).

2. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú lineárne závislé $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in R: \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

(Dajú sa umiestniť do jednej roviny).

Uhol vektorov $\angle \vec{u}, \vec{v} = \alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ je uhol, ktorý zvierajú ľubovoľné dve umiestnenia vektorov so spoločným začiatočným bodom.

SKALÁRNY SÚČIN

Definícia. Nech $\vec{u}, \vec{v}$ sú nenulové vektory, $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ je uhol vektorov. Číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

sa nazýva skalárny súčin vektorov $\vec{u}, \vec{v}$. Ak $\vec{u} = \vec{0}$ alebo $\vec{v} = \vec{0}$, tak $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Veta. Nech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Potom $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Ortogonalný priemet vektora $\vec{u}$ do smeru vektora $\vec{v}$.

Definícia. Nech $\vec{u}, \vec{v}$ sú vektory, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Vektor $\vec{u}_0$ sa nazýva ortogonalný priemet vektora $\vec{u}$ do smeru vektora $\vec{v}$, ak $\vec{u}_0$ je lineárne závislý s vektorom $\vec{v}$ a $(\vec{u} - \vec{u}_0) \perp \vec{v}$.

Veta. Nech $\vec{v} \neq \vec{0}$. Potom $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$.

Dôkaz. Vektor $\vec{u}_0$ je lineárne závislý s $\vec{v} \Rightarrow \vec{u}_0 = k \vec{v}$, $k \in R$,

$$(\vec{u} - \vec{u}_0) \perp \vec{v} \Rightarrow (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{u} - k \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = k \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow$$

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

VEKTOROVÝ SÚČIN

Definícia. Vektorovým súčinom vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sa nazýva vektor

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Poznámka. $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$, $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$.

Vlastnosti vektorového súčinu

$$\begin{aligned}\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3, \beta \in R: \quad & \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, \quad \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \\ & (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \\ & (\beta \vec{u}) \times \vec{v} = \beta(\vec{u} \times \vec{v}) \\ \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha, \quad \alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}), \alpha \in \langle 0, \pi \rangle\end{aligned}$$

Poznámka. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Obsah trojuholníka: $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$

ZMIEŠANÝ SÚČIN

Definícia. *Zmiešaným súčinom vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ (v danom poradí) sa nazýva číslo*

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Objem rovnobežnostena určeného bodmi A, B, C, D : $V = |\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})|.$

Poznámka. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

PRIAMKY V PRIESTORE A ROVINY

Parametrické rovnice priamky v priestore. Nech priamka p je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod priamky, platí

$$\vec{AX} \parallel \vec{u} \implies \vec{AX} = t\vec{u}, \quad t \in R \implies X - A = t\vec{u} \implies X = A + t\vec{u}, \quad t \in R.$$

$$\begin{aligned}p: \quad x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3, \quad t \in R\end{aligned}$$

Parametrické rovnice roviny. Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovými vektormi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod roviny, vektory $\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé, platí

$$\vec{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in R \implies X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in R.$$

$$\begin{aligned}\varrho: \quad x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \quad t, s \in R\end{aligned}$$

Normálová a všeobecná rovnica roviny. Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a normálovým vektorom $\vec{n} = (a, b, c)$, $(\vec{n} \perp \varrho)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod roviny, platí

$$\vec{AX} \perp \vec{n} \implies \vec{AX} \cdot \vec{n} = 0 \text{ a } \vec{AX} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \implies$$

$$\begin{aligned}a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) &= 0 && \text{normálová rovnica roviny } \varrho \\ ax + by + cz + d &= 0 && \text{všeobecná rovnica roviny } \varrho\end{aligned}$$

Veta. *Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovými vektormi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Potom rovnica roviny ϱ je*

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vzdialenosť bodu od priamky. Nech priamka p je určená bodom B a smerovým vektorom $\vec{u}$ a nech $A \notin p$. Potom $d(A, p) = \frac{\|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Vzdialenosť bodu od roviny. Nech rovina ϱ je určená bodom B a normálovým vektorom $\vec{n}$ a nech $A \notin \varrho$. Potom $d(A, \varrho) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{n}\|}$.