

FUNKCIE

Definícia. Nech $A \subseteq R, B \subseteq R$ sú dve množiny a f pravidlo, ktoré $\forall x \in A$ priradí jediný prvok $f(x) \in B$. Toto priradenie nazývame funkciou z množiny A do množiny B , označujeme $f: A \rightarrow B$.

Poznámka. Množinu A nazývame definičný obor funkcie, označujeme $A = D(f)$, množinu B nazývame koobor funkcie.

Množinu $H(f) = \{f(x), x \in A\}$ nazývame obor hodnôt funkcie f .

Množinu $G(f) = \{(x, y) \in R^2: y = f(x), x \in A\}$ nazývame grafom funkcie f .

Definícia (Zúženie funkcie). Nech $C \subset A$, $f: A \rightarrow R$, $g: C \rightarrow R$ a nech $\forall x \in C: f(x) = g(x)$. Funkciu f nazývame rozšírením funkcie g na množinu A , funkciu g nazývame zúžením funkcie f na množinu C , označujeme $g = f|_C$.

Definícia (Algebraické operácie s funkciami). Nech $f: A \rightarrow R$, $g: C \rightarrow R$ a nech $D = A \cap C \neq \emptyset$. Potom

$f + g: D \rightarrow R, \forall x \in D: (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

$f \cdot g: D \rightarrow R, \forall x \in D: (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Ak $E = A \cap \{x \in C: g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, tak $\frac{f}{g}: E \rightarrow R, \forall x \in E: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Definícia (Zložená funkcia). Nech $f: A \rightarrow R$, $g: B \rightarrow R$ a nech $f(A) \subseteq B$. Funkciu $g \circ f: A \rightarrow R, \forall x \in A: (g \circ f)(x) = g(f(x))$, nazývame zloženou funkciou z funkcií f a g . Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka, g vonkajšia zložka funkcie $g \circ f$.

Poznámka. Skladanie dvoch funkcií nie je komutatívna operácia ($g \circ f \neq f \circ g$).

Definícia. Nech A, B sú podmnožiny R , $f: A \rightarrow B$.

(a) Ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkcia f sa nazýva injektia.

(b) Ak $H(f) = B$, tak funkcia f sa nazýva surjektia.

(c) Ak funkcia f je injekciou a surjekciou, tak sa nazýva bijektia.

Definícia (Inverzná funkcia). Nech $f: A \rightarrow B$ je bijektia. Funkciu $f^{-1}: B \rightarrow A$ definovanú vzťahom $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \forall x \in A, y \in B$, nazývame inverznou funkciou k funkcii f .

Vlastnosti inverznej funkcie

1. $\forall x \in A: (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad f^{-1} \circ f: A \rightarrow A \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_A$.
2. $\forall y \in B: (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \quad f \circ f^{-1}: B \rightarrow B \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.
3. $G(f^{-1}) = \{(y, x) \in B \times A: (x, y) \in G(f)\}$ (symetria podľa priamky $y = x$).

Definícia (Párna a nepárna funkcia).

Nech $f: A \rightarrow R$, nech $\forall x \in A$ platí $-x \in A$. Ak

1. $\forall x \in A: f(-x) = f(x)$, tak f nazývame párnou funkciou.

2. $\forall x \in A: f(-x) = -f(x)$, tak f nazývame nepárnou funkciou.

Definícia (Periodická funkcia).

Hovoríme, že funkcia $f: A \rightarrow R$ je periodická s periódou $p \neq 0$, ak platí:

1. $\forall x \in A: x + p \in A$,

2. $\forall x \in A: f(x + p) = f(x)$.

Majmenšie kladné reálne číslo s danou vlastnosťou sa nazýva základná perióda.

Definícia (Monotónne funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$. Ak $\forall x_1, x_2 \in A$ platí:*

- (a) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, tak f sa nazýva *rastúca funkcia*,
- (b) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, tak f sa nazýva *neklesajúca funkcia*,
- (c) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, tak f sa nazýva *klesajúca funkcia*,
- (d) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, tak f sa nazýva *nerastúca funkcia*.

Veta. *Každá rýdzo monotónna (rastúca alebo klesajúca) funkcia je injekcia.*

Definícia (Ohraničené funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$.*

- (a) *Ak $\exists k \in R: \forall x \in A: k \leq f(x)$, tak hovoríme, že funkcia f je zdola ohraničená.*
- (b) *Ak $\exists K \in R: \forall x \in A: f(x) \leq K$, tak hovoríme, že funkcia f je zhora ohraničená.*
- (c) *Ak funkcia f je zdola a zhora ohraničená, tak hovoríme, že je ohraničená.*

Definícia (Infimum funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$. Číslo $m \in R$ sa nazýva infimum funkcie f , označujeme $m = \inf_{x \in A} f(x)$, ak platí:*

- 1. $\forall x \in A: m \leq f(x)$ (m je dolným ohraničením funkcie).
- 2. $\forall k > m \exists x_k \in A: f(x_k) < k$ (m je najväčšie dolné ohraničenie).

Definícia (Supremum funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$. Číslo $M \in R$ sa nazýva supremum funkcie f , označujeme $M = \sup_{x \in A} f(x)$, ak platí:*

- 1. $\forall x \in A: f(x) \leq M$ (M je horné ohraničenie funkcie).
- 2. $\forall K < M \exists x_K \in A: K < f(x_K)$ (M je najmenšie horné ohraničenie).

Poznámka. Ak v definíciách nahradíme funkciu f zúžením funkcie na množinu C , $f|_C$, tak hovoríme, že f má danú vlastnosť na množine C .

CYKLOMETRICKÉ FUNKCIE

1. Ak funkciu $f(x) = \sin x$ zúžime na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, tak funkcia $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ je rastúca, t.j. $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkussínus**, $\arcsin = \left(\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \right)^{-1}$, $\arcsin: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle: \arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y$.

2. Ak funkciu $f(x) = \cos x$ zúžime na interval $\langle 0, \pi \rangle$, tak funkcia $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$ je klesajúca, t.j. $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskosínus**, $\arccos = \left(\cos|_{\langle 0, \pi \rangle} \right)^{-1}$, $\arccos: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, \pi \rangle: \arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$.

3. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{tg} x$ zúžime na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tak funkcia $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ je rastúca, t.j. $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow R$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkustangens**, $\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$, $\operatorname{arctg}: R \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}): \operatorname{arctg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = y$.

4. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{cotg} x$ zúžime na interval $(0, \pi)$, tak funkcia $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}$ je klesajúca, t.j. $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}: (0, \pi) \rightarrow R$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskotangens**, $\operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)} \right)^{-1}$, $\operatorname{arccotg}: R \rightarrow (0, \pi): \operatorname{arccotg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{cotg} x = y$.

LIMITA FUNKCIE

$R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ — rozšírená reálna os.

Definícia (Okolie bodu). *Nech $\epsilon > 0$, $a \in R$.*

Množina $O_\epsilon(a) = \{x \in R: |x - a| < \epsilon\} = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ sa nazýva ϵ -ové okolie bodu a , $O_\epsilon^\circ(a) = \{x \in R: 0 < |x - a| < \epsilon\} = (a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon)$ sa nazýva prstencové ϵ -ové okolie bodu a .

Množina $O_\epsilon(-\infty) = O_\epsilon^\circ(-\infty) = \{x \in R: x < -\frac{1}{\epsilon}\} = (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ sa nazýva ϵ -ové okolie bodu $-\infty$.

Množina $O_\epsilon(\infty) = O_\epsilon^\circ(\infty) = \{x \in R: x > \frac{1}{\epsilon}\} = (\frac{1}{\epsilon}, \infty)$ sa nazýva ϵ -ové okolie bodu ∞ .

Definícia (Vnútorný bod). *Nech $\emptyset \neq A \subseteq R$. Bod $a \in A$ sa nazýva vnútorný bod množiny A , ak existuje $O_\epsilon(a)$ také, že $O_\epsilon(a) \subset A$. Množina všetkých vnútorných bodov množiny A sa nazýva vnútro A , označenie $\text{Int}A$.*

Definícia (Hromadný bod). *Nech $\emptyset \neq A \subseteq R$. Bod $a \in R^*$ sa nazýva hromadný bod množiny A , ak pre každé $O_\epsilon(a)$ platí: $O_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.*

Definícia (Limita funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in R^*$ je hromadný bod množiny A . Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu $b \in R^*$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak*

$$\forall O_\epsilon(b) \quad \exists O_\delta^\circ(a): f(O_\delta^\circ(a) \cap A) \subset O_\epsilon(b).$$

Poznámka. Ak $b \in R$, tak hovoríme, že f má v bode a vlastnú limitu, ak $b = \pm\infty$, tak hovoríme, že f má v bode a nevlastnú limitu.

Veta (Limita zúženia funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$, $B \subset A$, nech $a \in R^*$ je hromadný bod množín A , B . Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} (f|_B)(x) = b$.*

Definícia (Jednostranné limity). *Nech $f: A \rightarrow R$, nech $a \in R^*$ je hromadný bod množín $A \cap (-\infty, a)$, $A \cap (a, \infty)$.*

1. *Limita $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f|_{A \cap (-\infty, a)})(x)$ sa nazýva limita funkcie f v bode a zľava.*

2. *Limita $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f|_{A \cap (a, \infty)})(x)$ sa nazýva limita funkcie f v bode a sprava.*

Veta. *Nech $f: A \rightarrow R$, nech $a \in R^*$ je hromadný bod $A \cap (-\infty, a)$, $A \cap (a, \infty)$. Potom platí: limita funkcie f v bode a existuje práve vtedy, keď existujú jednostranné limity a rovnajú sa.*

Veta (o výpočte vlastných limit). *Nech $f, g: A \rightarrow R$, a nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$,*

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \in R$. Potom platí:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c.$$

$$(c) \quad \text{Ak } c \neq 0, \text{ tak } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$$

Veta. *Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in R^*$ je hromadný bod množiny A . Ak existuje vlastná limita funkcie f v bode a , tak existuje $O_\tau(a)$ také, že funkcia f je na množine $A \cap O_\tau(a)$ ohraničená.*

Veta. Nech $f, g: A \rightarrow R$, nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a nech existuje $O_\tau(a)$ také, že funkcia g je na množine $A \cap O_\tau(a)$ ohraničená. Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Veta. Nech $f, g: A \rightarrow R$, nech $\forall x \in A \setminus \{a\}: f(x) \leq g(x)$. Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, tak platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Dôsledok. Nech $f, g, h: A \rightarrow R$, nech $\forall x \in A \setminus \{a\}: f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Ak existujú limity funkcií f, g v bode a a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$.

Veta (o limite zloženej funkcie). Nech $f: A \rightarrow R$, $g: B \rightarrow R$ a nech $f(A) \subseteq B$. Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\forall x \in A \setminus \{a\}: f(x) \neq b$ alebo $g(b) = c$, a existuje $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, tak existuje limita zloženej funkcie $g \circ f: A \rightarrow R$ v bode a a platí $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Veta (o výpočte nevlastných limit). Nech $f, g: A \rightarrow R$, $k \in R$. Potom platí:

- (a) ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, tak $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- (b) ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\forall x \in A \setminus \{a\}: k \leq g(x)$, tak $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\forall x \in A \setminus \{a\}: 0 < k \leq g(x)$, tak $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ a $\forall x \in A \setminus \{a\}: f(x) \neq 0$, tak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $\forall x \in A \setminus \{a\}: f(x) > 0$, tak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

SPOJITOSŤ FUNKCIE

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in A$ je hromadný bod množiny A . Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, tak hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a .

Definícia. Nech $\emptyset \neq M \subset A$. Ak funkcia $f: A \rightarrow R$ je spojitá v každom bode množiny M , tak hovoríme, že f je spojitá na množine M . Ak $M = A$, tak hovoríme, že f je spojitá.

Veta. Nech $f, g: A \rightarrow R$ sú spojité funkcie v bode $a \in A$. Potom aj funkcie $f + g, f \cdot g, |f|: A \rightarrow R$ sú spojité v bode $a \in A$. Ak $a \in B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$, tak aj $\frac{f}{g}: B \rightarrow R$ je spojitá funkcia v bode a .

Poznámka. Všetky elementárne funkcie sú spojité.

Veta. Nech $f: A \rightarrow R$ je spojitá funkcia v bode $a \in A$, $g: B \rightarrow R$ je spojitá funkcia v bode $b = f(a) \in B$. Potom zložená funkcia $g \circ f: A \rightarrow R$ je spojitá v bode a .

VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCIÍ

Nech $a, b \in R$, $a < b$, $f: A \rightarrow R$, $\langle a, b \rangle \subseteq A$.

Definícia. Hovoríme, že funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, ak $f|_{\langle a, b \rangle}$ je spojitá funkcia.

Veta. Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, tak na $\langle a, b \rangle$ nadobúda minimum a maximum.

Veta. Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$.

Veta. Nech I je interval a f je spojitá funkcia na I . Potom $f(I)$ je buď jednoruková množina alebo interval.

Veta. Nech I, J sú intervaly a $f: I \rightarrow J$ je spojitá bijekcia. Potom $f^{-1}: J \rightarrow I$ je spojitá funkcia.

DERIVÁCIA FUNKCIE

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in A$ je hromadný bod množiny A . Ak existuje vlastná $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, tak číslo $f'(a)$ sa nazýva derivácia funkcie f v bode a . Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a .

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $A_1 = \{x \in A: \exists f'(x)\} \neq \emptyset$. Funkcia $f': A_1 \rightarrow R$, ktorá bodu $x \in A_1$ priradí $f'(x)$, sa nazýva derivácia funkcie f , hovoríme, že f je diferencovateľná na množine A_1 . Ak f' je spojitá funkcia, tak hovoríme, že f je spojite diferencovateľná na A_1 .

Veta (Nutná podmienka diferencovateľnosti v bode). Ak funkcia $f: A \rightarrow R$ má deriváciu v bode $a \in A$, tak je v bode a spojitá.

Veta (Derivácia súčtu, súčinu, podielu funkcií). Nech $f, g: A \rightarrow R$ sú diferencovateľné funkcie, nech $c \in R$. Potom $cf, f + g, f \cdot g: A \rightarrow R$ sú diferencovateľné funkcie a platí:

$$\begin{aligned} (a) \quad & [cf]' = cf' \\ (b) \quad & [f + g]' = f' + g' \\ (c) \quad & [f \cdot g]' = f'g + fg' \end{aligned}$$

Ak $\forall x \in A: g(x) \neq 0$ tak funkcia $\frac{f}{g}: A \rightarrow R$ je diferencovateľná a platí:

$$(d) \quad \left[\frac{f}{g} \right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Veta (Derivácia zloženej funkcie). Nech $f: A \rightarrow R$, $g: B \rightarrow R$, $f(A) \subseteq B$ a nech f, g sú diferencovateľné funkcie. Potom $g \circ f: A \rightarrow R$ je diferencovateľná funkcia a platí:

$$[g \circ f]' = (g' \circ f)f'.$$

Veta (Derivácia inverznej funkcie). Nech I, J sú intervaly, $f: I \rightarrow J$ je diferencovateľná bijekcia. Potom inverzná funkcia $f^{-1}: J \rightarrow I$ je diferencovateľná v bodoch $y \in J: (f' \circ f^{-1})(y) \neq 0$ a platí:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Derivácie elementárnych funkcií

$[c]' = 0$	$x \in R, c \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1}$	$x \in R, n \in N$
$[e^x]' = e^x$	$x \in R$
$[\ln x]' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$[a^x]' = a^x \ln a$	$x \in R, a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, \infty), a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in (0, \infty), \alpha \in R \setminus \{0\}$
$[\sin x]' = \cos x$	$x \in R$
$[\cos x]' = -\sin x$	$x \in R$
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in R \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$
$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
$[\operatorname{arcotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

Veta (Dotyčnica ku grafu funkcie). *Nech $f: A \rightarrow R$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom dotyčnica ku grafu funkcie v bode $T = (a, f(a))$ je daná rovnicou*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

DERIVÁCIE VYŠŠÍCH RÁDOV

$$\begin{array}{llll}
 \text{Nech} & f^{(0)}: A \rightarrow R & f^{(0)} = f & \\
 & f^{(1)}: A_1 \rightarrow R & f^{(1)} = f' & \emptyset \neq A_1 \subseteq A \\
 & f^{(2)}: A_2 \rightarrow R & f^{(2)} = f'' & \emptyset \neq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & f^{(n)}: A_n \rightarrow R & f^{(n)} = (f^{(n-1)})' & \emptyset \neq A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \dots \subseteq A_1 \subseteq A
 \end{array}$$

Funkcia $f^{(n)}$ sa nazýva derivácia n-tého rádu funkcie f . Hovoríme, že f je n-krát diferencovateľná na A_n . Ak $f^{(n)}$ je spojitá funkcia, tak hovoríme, že f je n-krát spojitě diferencovateľná na A_n .

VLASTNOSTI DIFERENCOVATEĽNÝCH FUNKCIÍ

Rolleova veta. *Nech f má nasledujúce vlastnosti:*

1. je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
2. je diferencovateľná na (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$.

Potom $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$.

Lagrangeova veta (Veta o prírastku funkcie).

Nech f má nasledujúce vlastnosti:

1. je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
2. je diferencovateľná na (a, b) .

Potom $\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Cauchyho veta. *Nech f, g majú nasledujúce vlastnosti:*

1. sú spojité na $\langle a, b \rangle$,
2. sú diferencovateľné na (a, b) a $\forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0$.

Potom $\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

L'HOSPITALOVE PRAVIDLÁ

Veta " $\left(\frac{0}{0}\right)$ ". *Nech $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod A , nech*

- (a) f, g sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,
- (b) $\forall x \in A \setminus \{a\}: g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.

Veta " $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ ". *Nech $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod A , nech*

- (a) f, g sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$.

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.

PRIEBEH FUNKCIE

Definícia. *Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a*

1. *lokálne minimum (ostré lokálne minimum), ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:*
 $\forall x \in O_\delta(a) \cap A: f(x) \geq f(a) \quad (f(x) > f(a)),$
2. *lokálne maximum (ostré lokálne maximum), ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:*
 $\forall x \in O_\delta(a) \cap A: f(x) \leq f(a) \quad (f(x) < f(a)).$

Definícia. *Nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a*

1. *globálne minimum, ak $\forall x \in A: f(x) \geq f(a)$,*
2. *globálne maximum, ak $\forall x \in A: f(x) \leq f(a)$.*

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in \text{Int } A$. Ak f má v bode a lokálny extrém a je v bode a diferencovateľná, tak $f'(a) = 0$.

Stacionárny bod — bod, v ktorom má funkcia 1. deriváciu rovnú 0.

Poznámka. Jediné body, v ktorých spojitá funkcia môže nadobúdať extrém sú krajné body definičného oboru, body, v ktorých neexistuje derivácia funkcie, stacionárne body.

Intervaly monotónnosti.

Veta (Postačujúca podmienka monotónnosti). Nech I je interval, funkcia f je spojitá na I a diferencovateľná na $\text{Int } I$.

- (a) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) \geq 0$, tak f je neklesajúca na I .
- (b) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) > 0$, tak f je rastúca na I .
- (c) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) \leq 0$, tak f je nerastúca na I .
- (d) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) < 0$, tak f je klesajúca na I .

Intervaly konvexnosti, konkávnosti.

Definícia. Nech I je interval, nech $f: I \rightarrow R$. Ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

- (a) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq (<) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, tak f sa nazýva (rýdzo)konvexná funkcia.
- (b) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq (>) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, tak f sa nazýva (rýdzo)konkávna funkcia.

Veta (Postačujúca podmienka konvexnosti, konkávnosti). Nech I je interval, funkcia f je spojitá na I a dvakrát diferencovateľná na $\text{Int } I$.

- (a) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) \geq 0$, tak f je konvexná na I .
- (b) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) > 0$, tak f je rýdzo konvexná na I .
- (c) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) \leq 0$, tak f je konkávna na I .
- (d) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) < 0$, tak f je rýdzo konkávna na I .

Definícia. Nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná na $O_\delta(a)$. Ak $\forall x_1, x_2 \in O_\delta(a)$, $x_1 < a < x_2: f''(x_1)f''(x_2) < 0$, tak a sa nazýva inflexný bod funkcie.

Taylorova veta. Nech funkcia f je $(n+1)$ -krát diferencovateľná na $O_\delta(a)$. Potom $\exists c \in O_\delta(a) \forall x \in O_\delta(a)$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

Dôsledok. Nech $n \geq 2$ je párne prirodzené číslo, funkcia f je n -krát spojitely diferencovateľná na $O_\delta(a)$, nech $f^{(i)}(a) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Potom platí:

- 1. ak $f^{(n)}(a) < 0$, tak f má v bode a ostré lokálne maximum,
- 2. ak $f^{(n)}(a) > 0$, tak f má v bode a ostré lokálne minimum.

Dôsledok. Nech $n \geq 3$ je nepárne prirodzené číslo, funkcia f je n -krát spojitely diferencovateľná na $O_\delta(a)$, nech $f^{(i)}(a) = 0$, $i = 2, \dots, n-1$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Potom a je inflexný bod funkcie.

Asymptoty bez smernice.

Priamka $x = a$, $a \in R$, sa nazýva asymptotou ku grafu funkcie, ak aspoň jedna jednostranná limita funkcie v bode a je nevlastná.

Asymptoty so smernicou.

Priamka $y = kx + q$, $a \in R$, sa nazýva asymptotou ku grafu funkcie v $\pm\infty$, ak

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in R, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] \in R.$$

Priebeh funkcie — postup.

1. Definičný obor funkcie, nulové body ($x \in D(f): f(x) = 0$).
2. Vlastnosti funkcie (párna, nepárna, periodická).
3. Spojitosť funkcie, limity funkcie v bodoch nespojitosti.
4. Intervaly monotónnosti funkcie.
5. Lokálne extrémny funkcie.
6. Intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna.
7. Inflexné body funkcie.
8. Limity v krajných bodoch definičného oboru, asymptoty.
9. Graf funkcie.
10. Obor hodnôt funkcie.