Týždeň 4

1. Nájdite definičný obor funkcie.
   a. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ $[\,\langle 0, 3\rangle\,]$ b. $f(x) = \ln\sqrt{3x - x^2}$ $[\,(0, 3)\,]$
   c. $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x} - e^x}$ $[\,R \setminus \{0\}\,]$ d. $f(x) = \dfrac{2}{3x^2 + x - 2}$ $[\,R \setminus \{-1, (2/3)\}\,]$
   e. $f(x) = \arcsin(2 - x)$ $[\,\langle 1, 3\rangle\,]$ d. $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x+1}$ $[\,(-\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty)\,]$
2. Určte definičný obor, inverznú funkciu a obor hodnôt funkcie f a rozhodnite, či je funkcia f zdola alebo zhora ohraničená.
   a. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$ $\left[\,D(f) = R \setminus \{\frac{1}{2}\}, f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2y+1}, H(f) = R \setminus \{\frac{1}{2}\}, \text{neohraničená}\,\right]$
   b. $f(x) = \ln(x-2) + 1$ $[\,D(f) = (2, \infty), f^{-1}(x) = e^{x-1} + 2, H(f) = R, \text{neohraničená}\,]$
   c. $f(x) = e^{2x+1} - 3$ $[\,D(f) = R, f^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \ln\sqrt{y+3}, H(f) = (-3, \infty), \text{ zdola}\,]$
   d. $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-1)}$ $\left[\,(1, 1+e\rangle, f^{-1}(y) = 1 + e^{1-y^2}, D(f^{-1} = H(f) = \langle 0, \infty), \text{ zdola}\,\right]$
3. Nájdite zloženú funkciu $F = g \circ f$ a určte $D(F)$
   a. $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = \sqrt{x}$ $\left[\,F(x) = \sqrt{x^2+1}, D(F) = R\,\right]$
   b. $f(x) = \sin x$ $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\left[\,F(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}, D(F) = R\,\right]$
   c. $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ $g(x) = \arcsin x$ $\left[\,F(x) = \arcsin\sqrt{x - x^2}, D(F) = \langle 0, 1\rangle\,\right]$
4. Funkciu $F(x)$ napíšte ako zloženú funkciu
   a. $F(x) = \ln\frac{x}{x+2}$ $\left[\,g(x) = \ln x, f(x) = \frac{x}{x+2}, F = g \circ f, D(F) = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)\,\right]$
   b. $F(x) = \sqrt{\sin^3 x}$ $\left[\,g(x) = \sqrt{x}, h(x) = x^3, f(x) = \sin x, F = g \circ h \circ f, D(F) = \bigcup_{k \in Z} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle\,\right]$
   c. $F(x) = e^{x^2 - x}$ $[\,g(x) = x^2 - x, f(x) = e^x, F = g \circ f, D(F) = R\,]$
   d. $F(x) = \operatorname{tg}^3(2x)$ $[\,g(x) = \operatorname{tg} 2x, f(x) = x^3, F = f \circ g, D(F) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}\,]$
5. Zistite, či je funkcia f periodická, ak áno, nájdite (najmenšiu) periódu funkcie f.
   a. $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $[\,T = \pi\,]$
   b. $f(x) = x\cos 2x$ [neperiodická]
   c. $f(x) = \sin 2x - 2\cos 3x + 1$ $[\,T = 2\pi\,]$
   d. $f(x) = 2^{\sin 3x}$ $[\,T = \frac{2}{3}\pi\,]$