PRÍKLADY

Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x) = \frac{6x+5}{1-4x^2}.$$

a, Nájdite jej definičný obor.
b, Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f a lokálne extrémy.
c, Napíšte rovnicu dotyčnice v každom lokálnom extréme.
Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie 1.

a, $D_f = R - \{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\}$
b,

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{6(1-4x^2)+(6x+5)8x}{(1-4x^2)^2} = \\ =& \frac{6+40x+24x^2}{(1-4x^2)^2}. \end{aligned}$$

Preto $x_1 = -\frac{3}{2}$ a $x_2 = -\frac{1}{6}$ sú stacionárne body.
Funkcia f je rastúca na intervaloch $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ a na $(\frac{1}{2}, \infty)$.
Funkcia f je klesajúca na intervaloch $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, a $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}]$.
Bod $x_1 = -\frac{3}{2}$ je bod ostrého lokálneho maxima.
Bod $x_2 = -\frac{1}{6}$ je bod ostrého lokálneho minima.
c, Rovnica dotyčnice v lokálnom maxime je

$$y = \frac{1}{2}$$

.

Rovnica dotyčnice v lokálnom minime je

$$y = \frac{9}{2}$$

.

Príklad 2. Zistite, či je spojitá funkcia f v bode 0, ak

$$f = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{pre } x > 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} + \frac{1}{2} & \text{pre } x < 0. \end{cases}$$

Riešenie 2.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0.$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to 0-} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x})+1} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x})+1} + \frac{1}{2} = 0.$$

Pretože

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0+} f(x)$$

funkcia je spojitá v bode 0.

Príklad 3.

a, Zistite, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n \, 3^n}{2^{2n}}.$$

b, Zistite, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Riešenie 3.

a, $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n \, 3^n}{2^{2n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3(n+1)}{4} = \infty > 1.$

Preto rad diverguje.

b, $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$

Preto rad konverguje.

Príklad 4. Vypočítajte

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Riešenie 4.

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int x - \frac{x}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + c = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + c.$$

Príklad 5. Vypočítajte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}\,dx.$$

Riešenie 5.

Substitúcia $y = \sin x$ vedie k

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4-y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2-y}\,dy + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2+y}\,dy =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln(2+y) - \frac{1}{4}\ln(2-y)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{1}{4}\ln 3.$$