8 Nekonečné rady

Príklad. Vypočítajte súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+3n}$$

.

Riešenie.

Polynóm v menovateli má nasledujúci rozklad na súčin

$$n^2+3n = n(n+3).$$

Preto zlomok (racionálna funkcia)

$$\frac{6}{n(n+3)}$$

má rozklad na elementárne zlomky

$$\frac{6}{n^2+3n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}.$$

Po porovnaní čitateľov dostaneme

$$6 = A(n+3) + Bn.$$

Postupným dosadením $n = 0$, $n = -3$ dostaneme
$6 = 3A, \qquad 6 = -3B.$
Preto

$$\frac{6}{n^2+3n} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+3}.$$

Teraz napíšeme n-tý čiastočný súčet nekonečného radu zo zadania.

$$S_n = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{\underline{4}}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{\underline{4}} - \frac{2}{7}\right) + \\ + \cdots + \left(\frac{2}{n-2} - \frac{2}{n+1}\right) + \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+2}\right) + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+3}\right).$$

(Podčiarknutím je naznačené prvé rušenie.)
Po zjednodušení je

$$S_n = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}.$$

Súčtom radu je

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{11}{3}.$$

Koniec.