8 Nekonečné rady

Príklad 1. Vypočítajte súčet radu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2-2n}$$

.

Riešenie.

Zlomok $\dfrac{1}{n^2-2n}$ rozložíme na súčet elementárnych zlomkov.

$$\frac{2}{n^2-2n} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n}$$

Po úprave pravej strany rovnosti porovnaním čitateľov dostaneme:

$$2 = An + Bn - 2$$

Dosadením $n = 2$ máme $2 = 2A$, dosadením $n = 0$ máme $2 = -2B$.
Teda

$$\frac{2}{n^2-2n} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}.$$

Teraz vypočítame n-tý čiastočný súčet radu

$$S_n = \frac{1}{3-2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4-2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}$$

Po sčítaní rovnako veľkých zlomkov s opačnými znamienkami dostaneme

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Súčet nekonečného radu je

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} = \frac{3}{2}.$$

Príklad 2. Vypočítajte súčet radu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n} - 5\cdot(-2)^{3n}}{4^{2n}}.$$

Riešenie. Rad zapíšeme ako súčet resp. rozdiel dvoch geometrických radov.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n}}{4^{2n}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5\cdot(-2)^{3n}}{4^{2n}}.$$

Vypočítame súčet každého z nich

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n}}{4^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^n$$

Kvocient radu je $q = \frac{9}{16}$ a prvý člen súčtu je $a = \left(\frac{9}{16}\right)^2$.
Súčet radu je $\frac{a}{1-q}$, teda

$$S_1 = \frac{\left(\frac{9}{16}\right)^2}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{81}{7 \cdot 16}.$$

Druhý rad:

$$S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot (-2)^{3n}}{4^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot (-8)^n}{16^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 5 \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Kvocient radu je $q = -\frac{1}{2}$ a prvý člen súčtu je $a = 5 \cdot \frac{1}{4}$.
Súčet tohoto radu je

$$S_2 = \frac{\frac{5}{4}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{6}.$$

Celkový súčet je

$$S = S_1 - S_2 = \frac{81}{7 \cdot 16} - \frac{5}{6}$$

Príklad 3. Rozhodnime, či konverguje rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n-1}{2n^2 - 5n + 13}$$

Riešenie. V čitateli n-tého sčítanca je polynóm stupňa 1., v menovateli polynóm stupňa 2.
Rozdiel stupňov je jedna, preto rad zo zadania porovnáme s radom

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

o ktorom vieme, že je divergentný.
Počítame limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-1}{2n^2-5n+13}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n}{2n^2 - 5n + 13} = \frac{3}{2}$$

Pretože $0 < \frac{3}{2} < \infty$ rady majú rovnaký charakter konvergencie.
Záver: Rad zo zadania tiež diverguje.

Príklad 4. Rozhodnime, či konverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

.

Riešenie. Použijeme Cauchyho kritérium.
Počítajme limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}} = lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)^2}}{\sqrt[n]{2^{n+1}}} = lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{2}{n}}}{2^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{2} < 1$$

Pretože $l < 1$, rad konverguje.

Príklad 5. Rozhodnime, či konverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\ (2n-1)!}{(3n)!} 2^n$$

.

Riešenie. Použijeme D'Alembertovo kritérium.
Počítajme limitu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)!\ (2(n+1)-1)!}{(3(n+1))!} 2^{(n+1)}}{\frac{(n+1)!\ (2n-1)!}{(3n)!} 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)!\ (2n+1)!}{(3n+3))!} 2^n \cdot 2}{\frac{(n+1)!\ (2n-1)!}{(3n)!} 2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!\ (2n+1)!\ (3n)! \cdot 2}{(n+1)!\ (2n-1)!\ (3n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\ (2n+1)\ 2n\ \ \cdot 2}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{8}{27} < 1.$$

Pretože $l < 1$, rad konverguje.