8 Nekonečné rady

Definícia. Nech $\{a_n\}$ je nekonečná číselná postupnosť.
Výraz $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \ldots$ nazývame nekonečný číselný rad. Značíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Číslo $S_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_N$ nazývame N-tý čiastočný súčet nekonečného radu.

Definícia. Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad.
Ak postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{S_N\}$ konverguje, tak číslo

$$S = \lim_{N \to \infty} S_N$$

nazývame súčet radu a hovoríme, že rad je konvergentý.

Vypočítajte súčet radu

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

Definícia. Rad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^n$ nazývame geometrický rad.

Veta. *Geometrický rad je konvergentný práve vtedy keď kvocient q spĺňa $|q| < 1$.*
Súčet konvergentného geometrického radu je daný vzťahom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}.$$

Vypočítajte súčet radu

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
7. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5 - (-1)^n}{2^n}$.

Veta. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sú nekonečné číselné rady.*
Nech $\forall n \geq n_0$ *platí*

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Potom:
- *Ak rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje, tak aj rad* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverguje.*
- *Ak rad* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konverguje, tak aj rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Veta. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *sú nekonečné číselné rady s nezápornými členmi.*
Nech existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$.
Potom oba rady majú rovnaký charakter.

Rozhodnite, či konverguje rad

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$.
10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2-2n+3}$.
11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-2n+3}$.

Veta (Cauchyho kritérium). *Nech* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*
Nech existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.
Potom
- *ak* $l < 1$, *tak rad konverguje.*
- *ak* $l > 1$, *tak rad diverguje.*

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n-1}$.
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$.
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan n}{2}\right)^n$.
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Veta (D'Alembertovo kritérium). *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*

Nech existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Potom

- *ak* $l < 1$, *tak rad konverguje.*
- *ak* $l > 1$, *tak rad diverguje.*

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+3)!}{(2n)!} 3^n$.
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} 2^{3n}$.
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$.

Veta (Leibnitzovo kritérium). *Nech* $a_n \geq 0$ *a nech* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *je nekonečný číselný rad so striedavými znamienkami.*

Ak

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
- $a_n + 1 \leq a_n$,

tak rad konverguje.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$.
23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

Výsledky

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ 5. 3 6. $\frac{5}{6}$ 7. $\frac{4}{3}$ 8. diverguje

9. konverguje	10. diverguje	11. konverguje	12. konverguje
13. konverguje	14. konverguje	15. konverguje	16. konverguje
17. konverguje	18. diverguje	19. konverguje	20. diverguje
21. konverguje	22. konverguje	23. konverguje	24. konverguje