Konvexnosť a konkávnosť.

Príklad 1. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia f konvexná resp. konkávna, ak

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 11.$$

Riešenie. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2.$$

$$f''(x) = 6x - 10.$$

Z rovnice $f''(x) = 6x - 10 = 0$ vypočítame jej nulový bod $x_0 = \frac{5}{3}$.
Ak $x > \frac{5}{3}$ tak $f''(x) > 0$ a teda funkcia f je konvexná na intervale $[\frac{5}{3}, \infty]$.
Ak $x < \frac{5}{3}$ tak $f''(x) < 0$ a teda funkcia f je konkávna na intervale $[-\infty, \frac{5}{3}]$.

Príklad 2. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia f konvexná resp. konkávna, ak

$$f(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Riešenie. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = \frac{2x(\sqrt{x^2+2}) - (x^2+3)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

Po rozšírení zlomku výrazom $\sqrt{x^2+2}$ dostaneme

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - (x^2+3)x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3 - x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - (x^3-x)3x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+2)^3}.$$

Po krátení zlomku výrazom $\sqrt{x^2+2}$ dostaneme

$$f''(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2+2) - (x^3-x)3x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{8x^2-2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Z rovnice $8x^2 - 2 = 0$ vypočítame nulové body $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ak $x > \frac{1}{2}$ tak $f''(x) > 0$ a teda funkcia f je konvexná na intervale $[\frac{1}{2}, \infty]$.
Ak $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ tak $f''(x) < 0$ a teda funkcia f je konkávna na intervale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Ak $x < -\frac{1}{2}$ tak $f''(x) > 0$ a teda funkcia f je konvexná na intervale $[-\infty, -\frac{1}{2}]$.

Príklad 3. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia f konvexná resp. konkávna, ak

$$f(x) = f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x).$$

Riešenie. Uvedomme si, že definičný obor $D_f = R$.
Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$f''(x) = -\frac{\cos x(1+\cos^2 x) + \sin x(2\cos x \sin x)}{(1+\cos^2 x)^2} = -\frac{\cos x(1+\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2} =$$

$$= -\frac{\cos x(2+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2} =$$

Pretože $2+\sin^2 x > 0$, nulové body vypočítame z rovnice $\cos x = 0$.
Teda $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Ak $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ tak $f''(x) < 0$ a teda funkcia f je konkávna.
Ak $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ tak $f''(x) > 0$ a teda funkcia f je je konvexná.