.

Príklad 1. Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia rastúca resp. klesajúca a nájdite jej lokálne extrémy, ak

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 11.$$

Riešenie. Definičný obor funkcie je $D_f = R$.
Vypočítame prvú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7.$$

Z rovnice $3x^2 - 10x + 7 = 0$ vypočítame stacionárne body $x_1 = 1$ a $x_2 = \frac{7}{3}$.
Ak $x > \frac{7}{3}$ tak $f'(x) > 0$ a teda funkcia f je rastúca na intervale $[\frac{7}{3}, \infty]$.
Ak $1 < x < \frac{7}{3}$ tak $f'(x) < 0$ a teda funkcia f je klesajúca na intervale $[1, \frac{7}{3}]$.
Ak $x < 1$ tak $f'(x) > 0$ a teda funkcia f je rastúca na intervale $[-\infty, 1]$.
Bod $x_1 = 1$ je bod ostrého lokálneho maxima.
Bod $x_2 = \frac{7}{3}$ je bod ostrého lokálneho minima.

Príklad 2. Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia rastúca resp. klesajúca a nájdite jej lokálne extrémy, ak

$$f(x) = \ln(1 + 2x^2 - x^4).$$

Riešenie.

Funkcia f je definovaná pre tie x, pre ktoré $1 + 2x^2 - x^4 > 0$.
Po substitúcii $z = x^2$ riešime rovnicu $1+2z-z^2 = 0$. Jej korene sú $z_1 = -1-\sqrt{2}$ a $z_2 = -1 + \sqrt{2}$.
Pretože len koreň z_2 je kladný, dostávame z neho $x_1 = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $x_2 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$.
Definičný obor funkcie je $D_f = (-\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{\sqrt{2}-1})$.
Vypočítame prvú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = \frac{4x - 4x^3}{1 + 2x^2 - x^4}.$$

Z rovnice $4x(1-x^2) = 0$ vypočítame stacionárne body $x_3 = -1$, $x_4 = 0$ a $x_5 = 1$.
Ak $x > 1$ tak $f'(x) < 0$ a teda funkcia f je klesajúca na intervale $[1, \sqrt{\sqrt{2}-1})$.
Ak $0 < x < 1$ tak $f'(x) > 0$ a teda funkcia f je rastúca na intervale $[0, 1]$.
Ak $-1 < x < 0$ tak $f'(x) < 0$ a teda funkcia f je klesajúca na intervale $[-1, 0]$.
Ak $x < -1$ tak $f'(x) > 0$ a teda funkcia f je rastúca na intervale $(-\sqrt{\sqrt{2}-1}, -1]$.
Bod $x_3 = -1$ je bod ostrého lokálneho maxima.
Bod $x_4 = 0$ je bod ostrého lokálneho minima.
Bod $x_5 = 1$ je bod ostrého lokálneho maxima.

Príklad 3. Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia rastúca resp. klesajúca a nájdite jej lokálne extrémy, ak

$$f(x) = f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

Riešenie.

Funkcia f je definovaná na R.
Vypočítame prvú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

Z rovnice $xe^{-x^2} = 0$ vypočítame stacionárny bod $x_1 = 0$.
Ak $x > 0$ tak $f'(x) > 0$ a teda funkcia f je rastúca na intervale $[0, \infty)$.
Ak $x < 0$ tak $f'(x) < 0$ a teda funkcia f je klesajúca na intervale $(-\infty, 0]$.
Bod $x_1 = 0$ je bod ostrého lokálneho minima.