4. Derivácia

Definícia. Nech $f : A \to R$, a nech $x_0 \in A$ je hromadný bod množiny A. Hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 diferencovateľná, ak existuje vlastná limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k.$$

Číslo k nazývame derivácia funkcie f v bode x_0. Značíme $f'(x_0) = k$.

Ak je funkcia f diferencovateľná v každom bode intervalu $I \subset A$, tak hovoríme že je diferencovateľná na intervale I. Funkciu $f' : I \to R$ nazývame derivácia funkcie f na intervale I.

Veta (o výpočte). *Nech $f : A \to R$, $g : A \to R$ sú diferencovateľné funkcie. Potom*

$(f + g)' = f' + g'$,
$(cf)' = c \cdot f'$, *(c je konštanta)*
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,
ak naviac $g \neq 0$, *tak* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Veta (o derivácii zloženej funkcie). *Nech $f : I \to J$, $g : J \to R$ sú diferencovateľné funkcie na svojich definičných oboroch. Potom zložená funkcia je diferencovateľná na I a platí*

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivácie niektorých elementárnych funkcií.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x	$\mathrm{tg}\,(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{cotg}\,(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Vypočítajte deriváciu funkcie

1. $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$
2. $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt{x}} + x$
3. $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$
4. $f(x) = (x^{10} + 1)(x^5 - 3)$
5. $f(x) = \dfrac{5 - x}{x + 3}$

5.1. $f(x) = \dfrac{5 - x}{(x + 3)^2}$

6. $f(x) = \mathrm{cotg}\, x$

6.1. $f(x) = \sqrt{\mathrm{cotg}\, x}$

7. $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 1}$
9. $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{(x-1)^2}$
10. $f(x) = \ln(x^2 - x + 5)$
11. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+3)}{x^2+5}$

Rovnica dotyčnice ku grafu diferencovateľnej funkcie f v bode $A = [x_0, f(x_0)]$ je:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A ak

12. $f(x) = x^2 - 7x + 5$ a $A = [2, ?]$.
13. $f(x) = x^2 - 7x + 5$ a $A = [?, 5]$.
14. $f(x) = \sin(x^2 + 2x)$ a $A = [0, ?]$.

14.1. $f(x) = \mathrm{tg}\,(2x)$ a $A = [?, 1]$.

15. $f(x) = \ln\sqrt{5 - x}$ a $A = [?, 0]$.
16. $f(x) = e^{\sqrt{x}-3}$ a $A = [?, e]$.
17. $f(x) = e^{\frac{1}{1+x^2}}$ a $A = [?, \sqrt{e}]$.

Nájdite parametre a, b tak, aby funkcia $f(x)$ bola diferencovateľná. (Aj v bode nula.)

18. $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{pre } x \geq 0 \\ ax + b & \text{pre } x < 0 \end{cases}$.

18.1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{pre } x \geq 0 \\ ax + b & \text{pre } x < 0 \end{cases}$.

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pre } x > 0 \\ x^2 + ax + b & \text{pre } x \leq 0 \end{cases}$.

Výsledky

1. $f'(x) = 6x - 7$.
2. $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 1$.
3. $f'(x) = 2x\sin x + (x^2+1)\cos x$.
4. $f'(x) = 10x^9(x^5 - 3) + (x^{10} + 1)5x^4$.
5. $f'(x) = \dfrac{-8}{(x+3)^2}$.
6. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
7. $f'(x) = \dfrac{1-2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
8. $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 6x)$.
9. $f'(x) = \dfrac{2\cos(2x+1)(x-1) - 2\sin(2x+1)}{(x-1)^3}$.
10. $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 5}$.
11. $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+3)(x^2+5)} - \dfrac{2x\ln(x^2+3)}{(x^2+5)^2}$.
12. $y + 5 = -3(x - 2)$.
13. $y - 5 = -7x$ alebo $y - 5 = 7(x - 7)$.
14. $y = 2x$.
15. $y = -\frac{1}{2}(x - 4)$.
16. $y - e = \frac{e}{8}(x - 16)$.
17. $y - \sqrt{e} = -\frac{\sqrt{e}}{2}(x - 1)$ alebo $y - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2}(x + 1)$.
18. $a = 1,\ b = 0$.
19. $a = 0,\ b = 1$.